



Étude de quelques modèles cinétiques décrivant le phénomène d'évaporation en gravitation

Pierre Carcaud

► To cite this version:

Pierre Carcaud. Étude de quelques modèles cinétiques décrivant le phénomène d'évaporation en gravitation. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Rennes, 2014. Français. NNT : 2014REN1S005 . tel-01018326

HAL Id: tel-01018326

<https://theses.hal.science/tel-01018326>

Submitted on 4 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et Applications

École doctorale Matisse

présentée par

Pierre Carcaud

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
UFR de Mathématiques

**Étude de quelques
modèles cinétiques
décrivant le phénomène
d'évaporation
en gravitation**

**Thèse soutenue à Rennes
le 2 juin 2014**

devant le jury composé de :

Pauline LAFITTE-GODILLON
Professeur à l'École Centrale de Paris / rapporteur

Marie-Hélène VIGNAL
Maître de conférence à l'Université de Toulouse III /
rapporteur

Stéphane CORDIER
Professeur à l'Université d'Orléans / examinateur

Roger LEWANDOWSKI
Professeur à l'Université de Rennes 1 / examinateur

Luc MIEUSSENS
Professeur à l'Université de Bordeaux 1 / examina-
teur

Mohammed LEMOU
Directeur de recherche CNRS à l'Université de
Rennes 1 / directeur de thèse

Florian MÉHATS
Professeur à l'Université de Rennes 1 / directeur de
thèse

Étude de quelques modèles cinétiques décrivant le phénomène d'évaporation en gravitation.

Pierre CARCAUD

4 juin 2014

Remerciements

Tout vient à point à qui sait attendre ... même s'il faut parfois attendre longtemps ... et je tiens à m'excuser auprès de tous ceux que j'ai fait si longuement patienter parce que j'ai beaucoup tardé ... surtout que tous autant qu'ils sont, ils ont contribué activement et de diverses manières à ce travail.

C'est donc il y a fort fort longtemps, dans une galaxie proche (notre galaxie) que je débuteais une thèse. Je ne remercierai certainement jamais assez mes deux directeurs de thèse Florian Méhats et Mohammed Lemou pour m'avoir proposé un sujet de thèse soigneusement construit et correspondant tout à fait à mes attentes. Je souhaitais pouvoir allier l'exploration théorique à l'expérimentation numérique sur des équations différentielles appliquées à la Physique. Mes exigences ont donc toutes été respectées, les modèles sur lesquels j'ai travaillé sont le fruit d'une collaboration avec le physicien Pierre-Henri Chavanis, avec qui j'ai pu un peu discuter et que je tiens également à remercier chaleureusement. Mes directeurs de thèse m'ont particulièrement bien accompagné, soutenu et aidé en de maintes reprises et je pense que ce que j'ai préféré dans cette grande aventure qu'est la thèse, ce sont les séances de travail avec Florian et Mohammed qui m'ont beaucoup apporté. L'exploration de pistes, les assauts donnés à divers problèmes particulièrement résistants et pour lesquels il faut changer d'angle d'attaque, les surprises inattendues, bonnes ou mauvaises. Je tiens par ailleurs à remercier mes deux rapportrices Marie-Hélène Vignal et Pauline Laffite-Godillon qui ont accepté de relire mon manuscrit dans les moindres détails et m'ont fait part de leurs remarques. Je remercie également, Stéphane Cordier, Roger Lewandowski et Luc Mieussens qui ont bien voulu être membres de mon jury de soutenance. Luc Mieussens a notamment bien voulu remplacer au pied levé Pierre-Henri Chavanis, qui avait lui aussi accepté de faire partie du jury.

J'ai pu bénéficier d'un excellent cadre de travail au sein de l'IRMAR dont le personnel est toujours aux petits soins. Je remercie également toute l'équipe d'analyse numérique, autant pour les repas conviviaux que pour les journées JEAN et le séminaire d'analyse numérique. C'est, financé en partie par le laboratoire mais aussi grâce à l'ANR Quatrain, que j'ai pu voyager pour assister à des conférences toutes très enrichissantes scientifiquement et humainement.

J'ai pu travailler dans une ambiance chaleureuse et conviviale assurée par les autres doctorants et ATER. Notamment le club des joueurs de cartes (Clément, Aurélien, Lionel, Mathilde, Jean-Romain, Sandrine et bien d'autres que j'oublie) mais aussi le bureau du 4^e (Maher, Nirmal, Arnaud et là encore bien d'autres personne que j'oublie). J'ai été accueilli par deux charmantes cobureaux (je ne connais pas le féminin de cobureau) Fanny et Anne-Claire, dont j'ai grandement apprécié la compagnie et les conseils fort utiles. J'ai pu moi même accueillir et conseiller un Nicolas qui est arrivé dans mon bureau accompagné d'un ... deuxième Nicolas dont la résidence officielle n'était pas mon bureau mais ... presque. Ça a été très agréable de travailler en leur compagnie.

Je n'ai pas terminé cette thèse de façon traditionnelle et c'est la raison pour laquelle elle a trainé en longueur. Au bout de mes trois premières années on m'a proposé un poste d'enseignant en CPGE. Si j'ai pu apprécier le travail de chercheur, j'ai pu en apprécier également toute la difficulté. Je me suis longuement posé la question (comme la plupart des doctorants j' imagine) de savoir si je continuais dans la voie de la recherche. J'ai pu en parallèle apprécier le joies de l'enseignement lors de mon monitorat et j'avoue que cette activité là m'a beaucoup plu. J'ai donc sauté sur l'opportunité qui je pense ne se reproduirait pas de sitôt et j'ai accepté ce poste en CPGE.

Les premières années d'enseignement ont été assez chargées. Il s'agissait d'un remplacement pour congé maternité commençant en septembre, et dès février j'ai dû, au pied lever, m'occuper d'une classe de 2^{nde}, d'une classe de 1^{re} S et d'une classe de T^{ale} STI. J'ai alors dû laisser ma thèse en suspend même si j'ai tenté de m'y replonger au moment des vacances. J'ai pu ensuite avoir un poste fixe en prépa l'année suivante. J'ai été conforté dans mon choix et je vais continuer avec bonheur dans cette voie. Mais je me devais de soutenir ma thèse. Ce sont mes directeurs de thèse par l'intermédiaire de mon cobureau Nicolas et Nicolas lui-même qui m'ont beaucoup encouragé à aller jusqu'au bout. J'ai donc fini de rédiger mon manuscrit sans certains travaux non aboutis que je ne pouvais pas, faute de temps à y consacrer, inclure.

Je termine en remerciant ceux qui ont été pour moi les soutiens les plus proches, mes amis Odalric et Astrid, ma famille et surtout mon compagnon Pierre qui m'a accompagné depuis le tout début et dont la patience a été mise à rude épreuve. Je n'ai pas été, pendant toutes ces années, aussi disponible que je l'aurais voulu ... mais il a supporté toutes mes sautes d'humeur et il a tenu bon jusqu'au bout.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Modélisation de l'évaporation	3
1.1.1	Introduction aux équations cinétiques	3
1.1.2	Un modèle complet mais complexe pour décrire un système gravitationnel avec évaporation.	9
1.2	L'équation de Landau homogène avec évaporation	10
1.2.1	Chapitres 2 et 3 : Le cas particulier des solutions à symétrie radiale pour un potentiel Maxwellien	13
1.2.2	Chapitre 4 : le cas des potentiels durs avec une vitesse d'échappement variable	16
1.3	Limite diffusive	17
I	Modèle de Landau homogène avec évaporation	21
2	Cas Maxwellien Radial	23
2.1	Introduction	23
2.1.1	General model	23
2.1.2	Evaporation laws	26
2.1.3	Notations and definitions	28
2.2	Theoretical Results	29
2.2.1	Main result	29

2.2.2	Basic estimates	30
2.2.3	Proof of the main result	34
2.3	Numerical results	46
2.3.1	Numerical scheme	47
2.3.2	Simulations	53
3	Profil asymptotique	59
3.1	Introduction et rappels	59
3.2	Changements de variables	61
3.3	Une étude spectrale	64
3.4	Profil asymptotique	70
3.5	Validation numérique	74
4	Le modèle de Landau général	77
4.1	Introduction	77
4.1.1	The model	77
4.1.2	Notations and definitions	79
4.1.3	Outline of the paper	80
4.2	Theoretical Result	81
4.2.1	Basic estimates	82
4.2.2	Existence proof	90
4.3	Numerical scheme and simulations	93
4.3.1	Construction of the numerical scheme	96
4.3.2	Numerical results	101
II	Limite diffusive	109
5	Modèle de type Vlasov-BGK avec évaporation	111
5.1	Le modèle	111

5.2	Le cas homogène	113
5.3	Le cas inhomogène	116
5.3.1	Existence et unicité de solutions régulières	116
5.3.2	Limite diffusive	118

Chapitre 1

Introduction

Je me suis intéressé dans cette thèse à divers modèles qui décrivent le phénomène d'évaporation dans un système gravitationnel. En fait, un modèle en particulier, que je présente au paragraphe 1.1.2. Mais comme son étude est très complexe et pour l'instant hors de portée, nous avons introduit plusieurs modèles simplifiés (que je présente dans cette introduction) dans le but lointain d'étudier le modèle complexe de base : l'équation de Vlasov-Poisson-Landau avec évaporation. Les divers modèles simplifiés sont présentés au paragraphe 1.2.

Ce que j'entends par système gravitationnel, c'est un ensemble d'objets célestes qui interagissent entre eux par gravitation universelle (dans le cadre de la mécanique classique). On considère que ces objets célestes sont en nombre suffisamment grand pour pouvoir faire une approximation statistique similaire à la description des gaz en thermodynamique statistique. C'est en fait une approximation statistique plus que similaire puisque les modèles considérés ici utilisent des équations de la thermodynamique des gaz.

Le phénomène d'évaporation vient du fait que certains objets célestes du système gravitationnel s'échappent car leur énergie cinétique est plus importante que leur énergie potentielle gravitationnelle. La portée de l'interaction de gravitation est infinie, mais si le corps céleste a acquis une vitesse suffisante alors il s'éloignera indéfiniment du système (sauf si des systèmes voisins lui font faire un demi-tour). Il n'est alors pas très pertinent de considérer que les corps qui se sont échappés font encore partie du système. En effet, lorsque vous observez une galaxie, vous n'avez aucune idée des objets qui s'y sont trouvés par le passé et qui se trouvent désormais très éloignés de cette galaxie. Je ne parlerai pas du tout par contre du phénomène inverse, le fait que des corps célestes passent suffisamment près pour rester piégés par le puit de potentiel créé par le système gravitationnel.

Il ne sera bien entendu pas question dans cette thèse de détailler comment le modèle complexe de base est établi physiquement, cela dépasse mes compétences. Les astrophysiciens ont montré que l'équation de Vlasov-Poisson-Landau est une bonne description des systèmes gravitationnels (voir [6]) et le modèle avec évaporation utilisé ici a été proposé conjointement par Pierre-Henri Chavanis et Mohammed Lemou. Les premiers travaux sur l'évaporation dans les galaxies remontent à ma connaissance aux travaux de Chandrasekhar (voir [14] notamment) où il utilise une équation de type Fokker-Planck avec une condition d'évaporation et où il a réussi à établir des taux d'évaporations. Ce même modèle a été repris par Pierre-Henri Chavanis et Mohammed Lemou qui ont complété dans [17] l'étude de Chandrasekhar en précisant notamment le comportement du taux d'évaporation. D'autres physiciens ont travaillé sur le phénomène d'évaporation en astrophysique (voir [25, 27, 36] et récemment [16]).

L'équation de Vlasov-Poisson-Landau fait partie de la grande famille des équations cinétiques que l'on présentera brièvement au paragraphe 1.1.1. La théorie mathématique des équations cinétiques est aujourd'hui très développée et ce dans divers domaines de la physique mathématique, voir les ouvrages [12, 13, 37]. L'application aux plasmas est sans doute l'une des branches les plus importantes avec de grands enjeux technologiques. Les équations cinétiques interviennent également en astrophysique [6] et ont aussi fait l'objet de travaux mathématiques dans ce contexte [7, 8, 17, 32]. À ma connaissance, l'équation de Vlasov-Poisson-Landau (sans évaporation) n'a pas été résolue mais, en revanche, les équations de Vlasov-Poisson et de Landau ont été étudiées et résolues séparément. Je renvoie au paragraphe 1.1.1 pour une bibliographie plus étayée sur l'équation de Landau. L'étude de ces équations avec une condition d'évaporation (qui impose de travailler avec un domaine de vitesses borné) a été l'objet de très peu de travaux mathématiques (à ma connaissance), ce qui explique le petit nombre de références bibliographiques sur ce sujet.

Entrons dans le vif du sujet. Je commencerai par une brève introduction aux équations cinétiques dans le paragraphe 1.1.1, puis je présenterai le modèle de Vlasov-Landau-Poisson dans le paragraphe 1.1.2 et je terminerai par la présentation de deux modèles simplifiés au paragraphe 1.2 dont l'étude fait l'objet de cette thèse.

1.1 Modélisation de l'évaporation dans un système gravitationnel

1.1.1 Introduction aux équations cinétiques

Le principe des équations cinétiques est de proposer un modèle continu pour décrire le mouvement d'un ensemble de particules. Le système de particules est décrit par une fonction de densité f . C'est une fonction positive qui dépend de trois variables : le temps t qui est un nombre réel, en général positif, la position x et la vitesse v qui sont des éléments de \mathbb{R}^3 (sauf si on considère des problèmes dans un espace qui n'est pas à 3 dimensions). Son interprétation est la suivante : pour des éléments de volumes infinitésimaux dx et dv , la quantité $f(t, x, v)dx dv$ représente le nombre de particules dans le volume dx centré en x qui ont à l'instant t une vitesse dans l'élément de volume dv centré en v (le nombre de particules étant infiniment grand). On peut ainsi approcher un modèle discret comprenant un grand nombre de particules et une équation aux dérivées partielles sur f permet alors de décrire l'évolution du système de particules.

Ce qui différencie les équations cinétiques d'autres modèles continus c'est que la vitesse est une variable. C'est indispensable pour décrire à une échelle « microscopique » des interactions entre les particules qui dépendent de leurs vitesses. C'est une description plus fine puisqu'on distingue les particules à une position donnée par leurs vitesses. On peut bien entendu repasser à un modèle non cinétique en intégrant la fonction de densité sur l'ensemble des vitesses. On obtient alors un modèle hydrodynamique.

Équation de Vlasov

Lorsqu'on néglige toute interaction entre les particules et toute force extérieure agissant sur le système, la densité f est solution de l'équation de transport libre

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0. \quad (1.1.1)$$

Cette équation est simple à comprendre formellement. On considère que les particules respectent les lois de la mécanique newtonienne et on est dans le cas où les particules soumises à aucune force ont toutes un mouvement rectiligne uniforme. Les particules qui sont à la position x à l'instant $t + dt$ avec une vitesse v étaient donc à la position $x - dtv$ au temps t ce qui se traduit par

$$f(t + dt, x, v) = f(t, x - dtv, v).$$

Or, on a

$$f(t + dt, x, v) = f(t, x, v) + dt \partial_t f(t, x, v) + \mathcal{O}(dt^2)$$

et

$$f(t, x - dtv, v) = f(t, x, v) - dtv \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \mathcal{O}(dt^2).$$

En passant à la limite $dt \rightarrow 0$, on retrouve donc bien l'équation (1.1.1). Maintenant, si les particules sont soumises à une force extérieure $F(f)(t, x, v)$ (qui peut dépendre de la position et de la vitesse de la particule à laquelle elle s'applique mais aussi de celles des autres), en supposant toujours que les particules n'interagissent pas entre elles, on obtient l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{1}{m} F(f) \cdot \nabla_v f = 0. \quad (1.1.2)$$

Pour l'obtenir formellement c'est le même principe, sauf que dans ce cas les particules qui sont à la position x à l'instant $t + dt$ avec une vitesse v , étaient à la position $x - dtv$ et avaient la vitesse $v - dt \frac{F}{m}$ (en ne considérant que des particules de même masse m) au temps t . On a donc cette fois

$$f(t + dt, x, v) = f\left(t, x - dtv, v - dt \frac{F}{m}\right),$$

ce qui permet d'obtenir (1.1.2). On peut tenir compte de l'interaction des particules dans le terme de force. Les modèles existants utilisent un terme de force local en temps et en espace

$$F(t, x, v, f(t, x, \cdot))$$

qui ne tient compte que de l'interaction de particules à la même position x . Le modèle qui nous intéressera c'est l'équation de Vlasov-Poisson qui permet de décrire l'interaction gravitationnelle (je la présenterai plus en détails au paragraphe 1.1.2). Mais ce n'est pas suffisant pour bien modéliser les interactions entre les particules d'après les observations faites par les physiciens. C'est pourquoi Boltzmann a introduit un nouveau terme $Q(f)(t, x, v)$ (historiquement l'équation de Boltzmann précède l'équation de Vlasov-Poisson), appelé terme de collision, qui tient compte de l'interaction entre particules non localement en espace et qui introduit une notion de chaos permettant d'expliquer l'augmentation de l'entropie (la fameuse flèche du temps). Le terme de collision se rajoute au second membre de l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{1}{m} F(f) \cdot \nabla_v f = Q(f).$$

D'autres termes de collision ont été introduits et d'ailleurs ce n'est pas le terme de collision de Boltzmann qui sera utilisé ici. Mais je vais commencer par présenter le terme de collision de Boltzmann.

Équation de Boltzmann

Pour les gaz peu denses, Boltzmann obtint formellement un terme de collision de la forme

$$Q_B(f)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{S}} B(v - v_*, \omega) (f(t, x, v') f(t, x, v'_*) - f(t, x, v) f(t, x, v_*)) d\omega dv_* \quad (1.1.3)$$

(voir [12, 13, 15, 37] pour plus de détails), avec \mathcal{S} la sphère unité de \mathbb{R}^3 , $B(v - v_*, \omega)$ le noyau de collision que j'explicite par la suite et v' et v'_* qui sont calculés à partir de v et v_* par les formules

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \omega, \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \omega. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Les vitesses v' et v'_* sont les vitesses de deux particules de même masse et de vitesses incidentes v et v_* après une collision élastique. En effet, par conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique on a

$$v + v_* = v' + v'_* \quad \text{et} \quad |v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2,$$

ce qui donne $|v - v_*| = |v' - v'_*|$ et en posant

$$\omega = \begin{cases} \frac{v' - v'_*}{|v - v_*|} & \text{si } v \neq v_*, \\ \text{un vecteur unitaire} & \text{sinon,} \end{cases}$$

on obtient bien (1.1.4) avec ω un vecteur de \mathcal{S} . Comme on le voit sur la Figure 1.1.1, le vecteur ω est relié à l'angle de déviation θ par

$$|v - v_*| \cos(\theta) = |(v - v_*) \cdot \omega|.$$

Le noyau de collision B dépend en fait uniquement de $\cos(\theta)$ et de $|v - v_*|$ et il décrit la quantité de particules déviées d'un angle θ , que ce soient des particules de vitesses incidentes v et v_* ou, par symétrie, des particules de vitesses incidentes v' et v'_* et déviées d'un angle $-\theta$ (qui ont alors les vitesses v et v_* après collision). Ainsi le terme

$$Q_B^+(f)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{S}} B(v - v_*, \omega) f(t, x, v') f(t, x, v'_*) d\omega dv_*$$

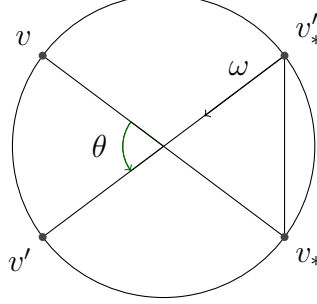


FIGURE 1.1.1 – Vitesses après une collision élastique.

est un terme de gain, c'est la densité de particules qui a acquis la vitesse v après collision avec une particule de vitesse incidente v'_* et le terme

$$Q_B^-(f)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{S}} B(v - v_*, \omega) f(t, x, v) f(t, x, v_*) d\omega dv_*$$

est un terme de perte, c'est la densité de particules dont la vitesse n'est plus v après une collision avec une particule de vitesse incidente v_* . Boltzmann a supposé que dans un gaz suffisamment raréfié on pouvait négliger les collisions de plus de deux particules. Pour obtenir formellement cette équation il a utilisé une hypothèse de chaos moléculaire qui stipule grosso modo que le devenir de deux particules après leur collision est indépendante de leur trajectoire avant la collision.

Le noyau de collision B ne peut pas toujours se calculer explicitement en connaissant l'interaction répulsive ou attractive entre les particules. Le cas de particules soumises à l'interaction Coulombienne a été résolu par Rutherford et il s'est servi de la formule qu'il a obtenu pour son expérience historiquement célèbre de mise en évidence du noyau des atomes. Pour des interactions proportionnelles à $\frac{1}{r^s}$ (attractives ou répulsives), avec r la distance entre les particules et $s \geq 2$, il est de la forme

$$B(z, \omega) = |z|^\gamma b(\theta),$$

avec

$$\gamma = \frac{s-5}{s-1} \tag{1.1.5}$$

et b une fonction lisse mais qui a une singularité lorsque $\theta \rightarrow 0$:

$$\sin(\theta)b(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} C\theta^{(\gamma-3)/2}. \tag{1.1.6}$$

Cette singularité implique que, dans le cas de forces Coulombiennes ou de gravitation ($s = 2$), l'intégrale sur \mathcal{S} dans le noyau d'intégration de Boltzmann n'est pas convergente (dans le cas $s > 2$ on peut utiliser le terme $f'f'_* - ff_*$ pour donner un sens à l'intégrale). La trop lente décroissance de l'interaction entraîne une prédominance de collisions rasantes durant lesquelles les particules sont peu déviées ($\theta \simeq 0$). Ce qui est relativement gênant puisque c'est justement le cas $s = 2$ qui nous intéresse. De nombreux travaux ont été effectués avec une hypothèse de troncature, il s'agit du fameux « Grad's angular cut-off », du nom du mathématicien qui l'a introduite. Une autre solution, introduite par le physicien Landau, consiste à effectuer un développement asymptotique de l'opérateur de Boltzmann lorsque le paramètre de troncature angulaire tend vers zéro. Cette analyse conduit à un nouvel opérateur de collision adapté au cas $s = 2$, l'opérateur de Landau que je présente dans le paragraphe suivant.

Équation de Landau, état de l'art

Landau (voir [15, 33]) propose d'utiliser, pour des particules en interaction Coulombienne (ou gravitationnelle), le terme de collision

$$Q_L(f)(t, x, v) = \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{A}(v - v_*) (f(t, x, v_*) \nabla_v f(t, x, v) - f(t, x, v) \nabla_{v_*} f(t, x, v_*)) dv_*, \quad (1.1.7)$$

avec $\mathcal{A}(z) = |z|^{\gamma+2} \Pi(z)$ où $\Pi(z)$ est la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}z)^\perp$:

$$\Pi(z) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - \frac{z \otimes z}{|z|^2}.$$

La constante $\gamma \in [-3, 1]$ est définie comme précédemment par (1.1.5) pour des particules régies par une interaction en $\frac{1}{r^s}$. Même si l'équation de Landau a été introduite pour étudier le cas Coulombien (plasmas) ou Newtonien (systèmes gravitationnels) qui correspond à $\gamma = -3$, elle est aussi définie pour d'autres potentiels pour lesquels l'étude est plus ou moins simple. Par niveau de difficulté croissant on a

- Le cas Maxwellien, $s = 5$ et $\gamma = 0$.
- Les potentiels durs (« hard potentials ») : $0 < \gamma < 1$ ($s > 5$).
- Les potentiels mous (« soft potentials ») : $-3 < \gamma < 0$ ($2 < s < 5$).

L'équation de Landau peut être vue comme une approximation de l'équation de Boltzmann lorsque les collisions rasantes sont prédominantes, ce qui signifie que l'on

considère principalement les collisions qui dévient faiblement les trajectoires des particules. D'après (1.1.6), dans le cas des potentiels intermoléculaires, la section efficace de collision présente une singularité en $\theta = 0$, ce qui correspond bien aux collisions rasantes. Le cas des particules chargées ou de corps en interaction Newtonienne correspond justement à un régime où ces collisions rasantes sont prédominantes.

Depuis les calculs de Landau, plusieurs travaux ont été consacrés à la justification mathématique de cette asymptotique collisions rasantes de l'opérateur de Boltzmann, ainsi qu'à la théorie de Cauchy autour des équations de type Landau. Le premier travail dans cette direction a été effectué par Arsen'ev et Buryak dans [3], dans le cas d'une section efficace collisionnelle régulière. La théorie a été développée ensuite par Goudon [24] et Villani [38] pour des sections efficaces moins régulières. Ces travaux concernaient le cas spatialement homogène, leur extension au cas inhomogène a été réalisée par Alexandre et Villani [1], dans le cadre des solutions renormalisées.

Dans le cas Coulombien, l'intégrale en θ diverge de façon logarithmique, ce qui a amené Degond et Lucquin [19] à examiner la limite du noyau de collision tronqué et remis à l'échelle lorsque ε tend vers 0, à savoir

$$b_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{\log(\varepsilon)} b(\theta) \mathbf{1}_{\theta \geq \varepsilon}.$$

On peut ainsi comprendre comment le noyau de Landau peut être obtenu, en effectuant un développement limité de la solution au voisinage de $\theta = 0$. Dans le cas non Coulombien, le travail [20] de Desvillettes complète cette analyse, dans un cadre linéarisé. En effectuant également un développement asymptotique autour de $\theta = 0$, il obtient en effet un terme prépondérant qui coïncide avec le terme de Landau dans le cas de forces en $1/r^s$.

D'autres études mathématiques ont été réalisées autour de l'équation de Landau : le comportement en temps grand des solutions a été étudié par Desvillettes et Villani [21, 22], l'analyse de l'opérateur linéarisé a été effectuée dans le cas inhomogène par Degond et Lemou [18], des versions quantiques et relativistes du modèle de Landau ont aussi été analysées dans [4, 5, 29] par Bagland et Lemou.

Comme mentionné précédemment, le modèle de Landau avec évaporation n'a pas été étudié dans la communauté mathématique. Je présenterai les propriétés de conservation attendues et héritées du terme de collision de Landau dans le paragraphe 1.2 où je ferai la comparaison du modèle avec ou sans évaporation. Après cette brève introduction aux équations cinétiques je vais enfin pouvoir présenter le modèle de Vlasov-Poisson-Landau.

1.1.2 Un modèle complet mais complexe pour décrire un système gravitationnel avec évaporation.

Il a été montré que, si l'équation de Vlasov sans terme de collision n'est pas une bonne modélisation, il en est de même de l'équation de Boltzmann ou de Landau (sans le terme $\frac{1}{m}F$). Certains phénomènes physiques ne sont pas correctement reproduits par ces équations. Par contre le système complet Vlasov-Poisson-Landau est reconnu comme un bon modèle tant au niveau des plasmas qu'au niveau de l'interaction gravitationnelle (voir [6]). Je présente directement le modèle de Vlasov-Poisson-Landau avec évaporation qui est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x \phi(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = Q_L(f)(t, x, v) \\ \Delta_x \phi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, & \phi(t, x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, & (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(t, x, v) = 0, & \text{si } e := \frac{|v|^2}{2} + \phi(x, t) \geq 0, \end{array} \right. \quad (1.1.8)$$

Avec Q_L le noyau de collision de Landau défini par (1.1.7).

Les 3 premières équations définissent le système de Vlasov-Poisson-Landau et c'est la dernière équation qui donne la condition d'évaporation. La fonction ϕ est le potentiel gravitationnel.

L'interaction gravitationnelle dérive de ce potentiel, ce qui explique le terme en $\nabla_x \phi$ dans l'équation de Vlasov. Le signe $-$ qui précède ce terme est dû à la nature attractive de la force gravitationnelle, c'est un signe $+$ qui apparaît dans le cas de forces Coulombiennes répulsives.

On introduit ici le potentiel gravitationnel afin de définir l'énergie mécanique e dans la dernière équation. L'énergie e est composée de l'énergie cinétique $\frac{|v|^2}{2}$ et de l'énergie potentielle (le système est écrit de façon à modéliser un système discret de particules qui ont toutes une masse constante égale à 1). Une particule ne s'évapore que si elle peut atteindre des positions x avec $|x|$ arbitrairement grand. Comme l'énergie mécanique e est conservée et que le potentiel ϕ est tel qu'il a une limite nulle à l'infini et comme le terme $\frac{|v|^2}{2}$ est nécessairement positif, la condition d'évaporation consiste donc à supposer que l'énergie e est positive.

Le potentiel ϕ est défini par la deuxième équation de (1.1.8), la divergence de la force gravitationnelle étant égale à la densité locale de particules. Cette équation est facile à interpréter. Si on considère une particule seule, elle crée un champ gravitationnel attractif radial, proportionnel à sa masse et à l'inverse du carré de la distance (c'est la fameuse loi de gravitation universelle de Newton). Le flux de cette force à

travers une sphère de rayon R centrée en la particule (qui correspond à l'intégrale de la divergence du champ sur la boule de rayon R) est donc proportionnel à la masse de la particule puisque le champ est proportionnel à R^{-2} (l'inverse du carré de la distance) et que la surface de la sphère est proportionnelle à R^2 .

Un défaut de l'hypothèse d'évaporation prise ici (ce n'est pas le seul) vient du fait que, puisqu'on ne considère pas d'interaction gravitationnelle créée par des particules extérieures au système et puisqu'une particule qui a acquis l'énergie suffisante pour s'évaporer est automatiquement exclue du système alors qu'elle peut encore se trouver à proximité des particules du système, on néglige donc une partie des forces. Il faut donc supposer que les forces créées par les particules qui s'évaporent et qui sont encore présentes à proximité du système sont négligeables.

Ce système étant trop difficile à étudier, nous avons regardé le cas homogène en espace. Dans ce cas, on suppose que la répartition de particules f est constante en la variable x (il se passe en tout point de l'espace la même chose). Dans ce cas l'équation de Vlasov (le membre de gauche de l'équation) est remplacé par le terme $\partial_t f$ (puisque le potentiel ϕ est alors aussi constant en x). Ce n'est pas une hypothèse très réaliste, surtout si on veut observer l'évaporation. Cependant, on peut toujours imaginer qu'on fait un zoom local, loin des bords du système. Dans tous les cas, l'étude du modèle homogène est utile si on veut mettre en place une démonstration d'existence de solution au système complet par une méthode de splitting. L'étude de ce système n'est donc pas dénuée d'intérêt (du moins mathématiquement). Ce modèle est présenté dans la partie suivante.

1.2 L'équation de Landau homogène avec évaporation

Lorsqu'on suppose que la répartition de particules est homogène en espace, on remplace le terme de Vlasov par la dérivée en temps de f et on obtient l'équation de Landau homogène :

$$\partial_t f = Q_L(f), \quad (1.2.1)$$

avec Q_L qui est défini par (1.1.7). Il n'y a donc plus de potentiel de gravitation ϕ qui permette d'exprimer la condition d'évaporation sous la forme donnée dans (1.1.8). Pour déterminer la vitesse d'échappement, on utilise alors le théorème du Viriel, qui donne une relation entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un système à l'équilibre (il s'agit de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle globale du système). Cela permet de déterminer la vitesse d'échappement moyenne (en moyenne quadratique) en fonction de l'énergie cinétique du système que l'on peut calculer. Pour le détail du raisonnement je renvoie le lecteur à l'introduction du premier

chapitre de cette thèse (paragraphe 2.1.1). On travaille alors sur un domaine de vitesse borné (ce qui n'avait jamais été fait avant sur l'équation de Landau), qui est la boule B_R de \mathbb{R}^3 centrée en 0 et de rayon R qui dépend du temps. Autrement dit, on travaille sur le domaine en temps et en vitesse (il n'y a plus de variable d'espace dans l'équation homogène)

$$D = \{(t, v) \mid t \in [0, +\infty[, v \in B_{R(t)}\}.$$

Le noyau de collision Q_L est remplacé par le noyau de collision Q_R dont la définition diffère de celle de Q_L juste par le fait que l'intégrale se calcule sur $B_{R(t)}$ et non sur \mathbb{R}^3 :

$$Q_R(f)(t, v) = \nabla_v \cdot \int_{B_{R(t)}} \mathcal{A}(v - v_*) (f_* \nabla_v f - f \nabla_{v_*} f_*) dv_*, \quad (1.2.2)$$

où on a noté $f = f(t, v)$ et $f_* = f(t, v_*)$. On impose une condition de Dirichlet homogène en vitesse :

$$|v| = R(t) \Rightarrow f(t, v) = 0. \quad (1.2.3)$$

D'après le théorème du Viriel on obtient la formule

$$R(t) := \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{\frac{E_f(t)}{M_f(t)}}, \quad (1.2.4)$$

avec M_f et E_f , la masse et l'énergie de f , définies par :

$$M_f(t) := \int f(t, v) dv, \quad E_f(t) := \int f(t, v) v^2 dv. \quad (1.2.5)$$

Le rayon du domaine de vitesse dépend donc d'une façon non linéaire et non locale de la solution f . Il dépend en fait uniquement de la température Θ_f qui est définie par

$$\Theta_f := \frac{E_f}{3M_f}. \quad (1.2.6)$$

Pour comprendre la dynamique du système, il faut donc déterminer l'évolution des moments M_f et Θ_f (ou de façon équivalente M_f et E_f). Dans le cas de l'équation de Landau sans évaporation, ces moments sont conservés :

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_L(f)(t, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.7)$$

C'est une propriété essentielle pour que le modèle soit physiquement pertinent et elle est facile à vérifier. En effet, si on considère une fonction ϕ de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , une simple intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_L(f)(t, v) \phi(v) dv = - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{A}(v - v_*) (f_* \nabla_v f - f \nabla_{v_*} f_*) \cdot \nabla \phi(v) dv_* dv,$$

et en symétrisant on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q_L(f)(t, v) \phi(v) dv \\ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (f_* \nabla_v f - f \nabla_{v_*} f_*)^T \mathcal{A}(v - v_*) (\nabla \phi(v_*) - \nabla \phi(v)) dv_* dv. \end{aligned}$$

Il est évident que cette intégrale est nulle pour $\phi(v) = 1$ ou $\phi(v) = v_i$, $i = 1, 2, 3$. Pour $\phi(v) = v^2$, il suffit de remarquer que $\mathcal{A}(v - v_*) = |v - v_*|^{\gamma+2} \Pi(v - v_*)$ avec $\Pi(v - v_*)$ la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}(v - v_*))^\perp$. Lorsqu'on rajoute une hypothèse d'évaporation, la masse M_f et l'énergie E_f sont décroissantes. Cela vient du fait que, puisque l'intégrale dans la définition de Q_R est sur B_R , il y a un terme de bord dans l'intégration par parties qui est égal à

$$\int_{\partial B_{R(t)}} \int_{B_{R(t)}} f(t, v_*) \nabla_v f(t, v)^T \mathcal{A}(v - v_*) \frac{v}{B_{R(t)}} \varphi(v) dv_* d\sigma(v),$$

avec σ la mesure sur $\partial B_{R(t)}$. Ce terme est négatif pour ϕ positif car $\nabla_v f(t, v)$ est colinéaire et de sens contraire à v et car $\mathcal{A}(v - v_*)$ est symétrique positive. L'énergie et la masse ne sont donc pas conservées mais par contre on déduit de ce terme de bord la loi suivante :

$$E'_f = R^2 M'_f. \quad (1.2.8)$$

Si on suppose que la vitesse d'échappement R est constante, (1.2.8) implique que le moment :

$$\tilde{M}_f := M_f - \frac{E_f}{R^2} \quad (1.2.9)$$

est conservé. Ce moment est toujours positif ou nul car d'après (1.2.5)

$$E_f \leq R^2 M_f \quad (1.2.10)$$

avec égalité si et seulement si $f(t, \cdot)$ presque partout nulle sur B_R (car f est positive). Le fait que \tilde{M}_f soit conservé a pour conséquence importante (si f_0 n'est pas nulle presque partout) que la masse M_f est minorée par une constante strictement positive :

$$M_f = \tilde{M}_f + \frac{E_f}{R^2} \geq \tilde{M}_f = \tilde{M}_{f_0} > 0. \quad (1.2.11)$$

Dans ce cas la totalité des particules ne s'évapore pas. C'est également le cas si R est une fonction croissante puisque \tilde{M}_f est alors croissante :

$$\tilde{M}'_f = \frac{2R'E_f}{R^3} \leq 0.$$

Par contre, si R n'est ni constant ni croissant, j'ai pu mettre en évidence numériquement que la masse M_f s'annule en temps fini (voir le paragraphe 4.3.2). Je n'ai pas

réussi à démontrer, dans le cas $\gamma = -3$ et R donné par (1.2.4), s'il y a évaporation totale ou non. La seule chose que je peux dire c'est que, en combinant (1.2.4) et (1.2.8), on obtient les relations suivantes entre le rayon R , la masse M_f , l'énergie E_f et la température Θ_f :

$$\frac{R}{R(0)} = \frac{\Theta_f}{\Theta_{f_0}} = \left(\frac{M_f}{M_{f_0}} \right)^{-\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{E_f}{E_{f_0}} = \left(\frac{M_f}{M_{f_0}} \right)^{1-\gamma}. \quad (1.2.12)$$

On peut remarquer que pour $\gamma \geq 0$, la température est croissante, ce qui peut sembler très étrange. En fait, d'après (1.2.10) et (1.2.4), la formule de rayon donnée par le théorème du Viriel n'est valable que pour $\gamma \leq 0$, le cas $\gamma = 0$ étant très particulier puisqu'il implique que $f(t, \cdot)$ est presque partout nulle sur $B_{R(t)}$. La minoration de la masse par une constante strictement positive est importante pour montrer l'existence de solutions au problème de Cauchy (voir plus loin le paragraphe 1.2.2).

Pour toute la partie théorique, on a fait l'hypothèse simplificatrice d'une vitesse d'échappement constante dans les chapitres 2 et 3 ou d'une fonction fixée du temps dans le chapitre 4. L'hypothèse d'une vitesse d'échappement constante est certainement l'hypothèse la moins réaliste physiquement puisqu'il est logique qu'au fur et à mesure que des particules s'évaporent, l'attraction gravitationnelle et donc la vitesse d'échappement diminuent. On observe dans ce cas que le comportement du modèle n'est pas le comportement prévu (comme je le redirai au paragraphe 1.2.1, on s'attend à un taux d'évaporation exponentiel mais le modèle a un taux d'évaporation beaucoup plus lent lorsque R est une constante). J'ai également effectué des tests numériques avec la loi (1.2.4) (voir paragraphe 4.3.2) et on obtient une vitesse d'évaporation plus rapide.

La deuxième hypothèse simplificatrice vient du fait que, même si on a remplacé le terme de collision de Boltzmann par le terme de Landau, l'équation de Landau reste très compliquée à étudier pour le potentiel gravitationnel ($\gamma = -3$) et même de façon générale pour les potentiels mous. Je me place donc dans le cadre des potentiels durs ($\gamma \geq 0$) pour le chapitre 4 et avec le potentiel Maxwellien ($\gamma = 0$) pour les chapitres 2 et 3.

Pour les chapitres 2 et 3 on simplifie encore plus le modèle en supposant que la solution est à symétrie sphérique. Dans ce cas, le terme de collision de Landau se simplifie et on obtient un terme de type Fokker-Planck.

1.2.1 Chapitres 2 et 3 : Le cas particulier des solutions à symétrie radiale pour un potentiel Maxwellien

Lorsque la condition initiale f_0 est à symétrie radiale, la solution f est à symétrie radiale car l'opérateur de collision de Landau est invariant par transformation ortho-

gonale sur la variable v . Dans ce cas, et lorsqu'on suppose le potentiel Maxwellien ($\gamma = 0$), on peut simplifier (par un calcul simple donné au paragraphe 2.1.2) le noyau de collision de Landau en un noyau de type Fokker-Planck (sur ce type de noyau on pourra consulter notamment [11, 30, 31]) et on obtient l'équation

$$\partial_t f(t, v) = Q_{FP}(f)(t, v), \quad (1.2.13)$$

où Q_{FP} est défini par

$$Q_{FP}(f)(t, v) = \nabla_v \cdot (E_f(t) \nabla_v f(t, v) + 3v M_f(t) f(t, v)), \quad (1.2.14)$$

avec M_f et E_f qui sont définis par (1.2.5). Ici, pour montrer l'uniforme parabolicité de l'opérateur, il suffit de minorer l'énergie. On peut le faire (voir Lemme 2.2.2) en minorant la masse (ce qui est facile lorsque le rayon est constant : (1.2.11)), et avec une estimation qui assure l'équi-intégrabilité (en fait il suffit de contrôler l'accumulation au voisinage de 0). Ici on peut obtenir une estimation¹ $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)$ (voir le Lemme 2.2.4). On peut démontrer l'existence de solutions régulières au problème de Cauchy par un point fixe contractant, mais également le comportement asymptotique pour la masse M_f et l'énergie E_f (voir le Théorème 2.2.1). Le taux d'évaporation est exponentiel d'après la physique mais dans le cas d'une vitesse d'échappement R constante ce taux est beaucoup plus lent². Plus précisément, on a les équivalents suivants :

$$\Theta_f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R^2}{2 \log(t)}, \quad E_f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3M_\infty R^2}{2 \log(t)}, \quad M_f(t) - M_\infty \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3M_\infty}{2 \log(t)}, \quad (1.2.15)$$

avec

$$M_\infty := \tilde{M}_{f_0} = M_{f_0} - \frac{E_{f_0}}{R^2}. \quad (1.2.16)$$

Étant donné la définition (1.2.6) de la température Θ_f à partir de la masse M_f et de l'énergie E_f , le fait que le moment \tilde{M}_f , défini par (1.2.9), soit conservé (d'après (1.2.8)) et le fait que la vitesse d'échappement R soit constante par hypothèse, il suffit de démontrer l'équivalent sur l'énergie pour avoir tous les autres. Cette démonstration, donnée dans le paragraphe 2.2.3, est assez technique. Je vais essayer de donner ici une intuition du résultat. Si on regarde l'évolution de la température, on trouve après une intégration par parties

$$E'_f(t) = R^2 E_f(t) \int_{\partial B_R} \partial_n f(t, v) d\sigma(v) - 2E_f(t) \int_{B_R} \nabla_v f(t, v) \cdot v dv - 6M_f(t) E_f(t)$$

¹Il est même possible d'obtenir une estimation \mathbb{L}^∞ comme on le démontre sous des hypothèses plus générales au Lemme 4.2.3.

²J'ai même pu le constater numériquement pour un potentiel non Maxwellien ($\gamma \neq 0$) au paragraphe 4.3.2.

avec $\partial_n f$ la dérivée normale de f (selon la normale sortante à B_R) et σ la mesure surfacique sur ∂B_R . Une deuxième intégration par parties sur le terme

$$\int_{B_R} \nabla_v f(t, v) \cdot v \, dv$$

permet de montrer que seul le terme de bord reste :

$$E'_f(t) = R^2 E_f(t) \int_{\partial B_R} \partial_n f(t, v) \, d\sigma(v). \quad (1.2.17)$$

L'interprétation de ce terme de bord est que l'évaporation est due en intégralité à la diffusion, le coefficient de diffusion étant l'énergie. L'évaporation fait diminuer l'énergie et elle se ralentit donc elle-même. Le terme qui est difficile à contrôler est la dérivée normale de f sur ∂B_R . Cependant, on observe (et on le démontre précisément au Chapitre 3) que la solution f se rapproche asymptotiquement d'un profil de type Maxwellien. Si on remplace formellement dans (1.2.17) f par une Maxwellienne qui a sur \mathbb{R}^3 une même énergie et une masse M_∞ :

$$\mathcal{M}_f(t, v) = \frac{3^{\frac{3}{2}} M_\infty^{\frac{5}{2}}}{(2\pi E_f(t))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{3M_\infty v^2}{2E_f(t)}}, \quad (1.2.18)$$

on obtient

$$E'_f(t) = -C E_f^{-\frac{3}{2}}(t) e^{-\frac{3M_\infty R^2}{2E_f(t)}}. \quad (1.2.19)$$

avec C une constante strictement positive qui dépend de M_∞ et de R . À partir de (1.2.19) on obtient l'équivalent souhaité. En pratique, je n'ai pas établi cette équation différentielle pour l'énergie, mais j'ai procédé par des inéquations pour montrer l'équivalent de l'énergie en deux temps. La majoration est plus simple, on adapte la démonstration qui permet de montrer la convergence vers 0 d'une solution de l'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet homogène, mais comme Q_{FP} n'est pas auto-adjoint, on travaille dans un espace \mathbb{L}^2 à poids. Il suffit de remarquer qu'on peut mettre Q_{FP} sous une forme « divergence de gradient » :

$$Q_{FP}(f)(t, v) = \nabla_v \cdot \left(E_f(t) e^{-\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} \nabla_v \left(e^{\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} f(t, v) \right) \right). \quad (1.2.20)$$

Pour la minoration c'est plus technique. Pour montrer que la température ne s'évapore pas trop vite il faut majorer la dérivée normale au bord en comparant à un profil Maxwellien qui est sur-solution de l'équation (1.2.13).

Une fois qu'on a obtenu l'équivalent de l'énergie on peut, au chapitre 3, montrer que la solution f se rapproche asymptotiquement d'un profil qui évolue lui-même

en fonction du temps et qui converge vers un pic de Dirac. On reprend la méthode classique des solutions auto-similaires qui consiste à décomposer la solution suivant les différents modes propres de Q_{FP} et montrer que tous les modes autres que le fondamental peuvent être négligés après un certain temps. L'évaporation très lente n'aide pas, mais on arrive quand même à s'en sortir par des estimations un peu techniques. On se ramène grâce, à un changement de variables (qui dépend de M_f et E_f), à un oscillateur harmonique, mais sur une boule de \mathbb{R}^3 dont le rayon dépend cette fois du temps et qui tend vers $+\infty$ (voir les Lemmes 3.2.1 et 3.2.2). Lorsqu'on refait le changement de variable inverse on comprend que le profil trouvé va être contracté et se rapprocher d'un pic de Dirac.

Des simulations numériques sont réalisées au paragraphe 2.3.2 à l'aide d'un schéma numérique conservatif qui est présenté au paragraphe 2.3.1. L'équivalent discret du moment conservé \tilde{M}_f (défini par (1.2.9)) est lui aussi conservé. C'est une propriété essentielle pour observer numériquement la convergence vers un pic de Dirac discret (avec un schéma non conservatif la solution numérique tend vers 0). Cette convergence vers un Dirac est démontrée (Proposition 2.3.2) mais elle est difficile à observer à cause de la très lente évaporation. Le schéma respecte également la décroissance de la masse et de l'énergie (voir Proposition 2.3.1). La validation numérique du profil asymptotique est faite au paragraphe 3.5.

1.2.2 Chapitre 4 : le cas des potentiels durs avec une vitesse d'échappement variable

Dans le chapitre 4, on démontre (Théorème 4.2.1) l'existence de solutions régulières au problème de Cauchy tant que toute la masse ne s'est pas évaporée. Plus précisément, les solutions existent sur l'intervalle $[0, T_*[$ avec $T_* > 0$ qui est tel que :

$$T_* = +\infty \text{ ou } \lim_{t \rightarrow T_*} M_f(t) = 0.$$

L'hypothèse de minoration de la masse couplée à un argument d'équi-intégrabilité est nécessaire pour montrer l'uniforme parabolicité de l'opérateur

$$\partial_t - Q_R$$

(voir le Lemme 4.2.5). Dans le cadre de l'équation de Landau homogène sans évaporation, la masse est conservée et l'équi-intégrabilité est assurée grâce à la décroissance

de l'entropie³ de Boltzmann :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \log f(t, v) dv. \quad (1.2.21)$$

Lorsqu'il y a évaporation on montre l'équi-intégrabilité grâce à une estimation \mathbb{L}^∞ en temps et en vitesse (voir Lemme 4.2.3), ce qui est mieux qu'une estimation d'entropie, mais il faut se restreindre au cas des potentiels durs ($\gamma \geq 0$). Je n'ai pas réussi à obtenir d'estimation pour $\gamma < 0$ alors qu'il existe de tels estimations dans la littérature pour l'équation de Landau sans évaporation. La décroissance de la masse donne une estimation \mathbb{L}^1 , mais il faut un peu plus qu'une estimation \mathbb{L}^1 pour avoir l'équi-intégrabilité. Comme je l'ai dit précédemment, on ne peut pas, dans le cas $\gamma \geq 0$, travailler avec une vitesse R donnée par (1.2.4). Si on veut regarder la variation d'entropie définie par (1.2.21) lorsqu'on travaille sur B_R avec une condition de Dirichlet homogène pour f , on obtient (après une intégration par partie formelle) un terme de bord non défini à cause du terme $\log f$ avec f qui s'annule au bord. En fait, si on évalue numériquement l'entropie sur des exemples, elle est croissante. Ce n'est pas forcément choquant puisqu'on est dans le cas d'un système ouvert et, s'il y a évaporation totale ou si le système converge vers un pic de Dirac en vitesse, alors l'entropie tend vers un maximum (la quantité d'information est maximale puisqu'on connaît exactement la vitesse de chaque particule).

Pour un rayon variable on ne peut pas assurer que la masse soit pour tout temps t minorée par une constante strictement positive et numériquement, on observe le contraire. Comme je l'ai fait remarquer précédemment, si on considère une vitesse d'échappement R constante ou croissante (voir le début du paragraphe 1.2), la masse est bien minorée par une constante strictement positive, mais ce n'est pas une hypothèse réaliste physiquement.

Dans la seconde partie du chapitre 4 (paragraphe 4.3.2) on généralise le schéma numérique introduit au paragraphe 2.3.1 pour le cas Maxwellien. C'est un schéma numérique qui reprend les propriétés de décroissance de la masse et de l'énergie du modèle continu.

1.3 Chapitre 5 : Limite diffusive

Sans l'hypothèse d'homogénéité en espace, il est beaucoup plus difficile de montrer l'existence de solution, même dans le cas d'un potentiel Maxwellien avec l'hypothèse

³Il ne s'agit pas de l'entropie au sens des physiciens qui doit toujours être croissante. L'entropie des mathématiciens est toujours décroissante, on peut, comme dans [37] ne pas l'appeler entropie mais fonctionnelle de quantité d'information.

d'une symétrie radiale en vitesse. Par contre, on peut regarder la limite du modèle vers un modèle hydrodynamique. On revient à un modèle non cinétique (plus « macroscopique ») en éliminant la variable de vitesse. Seuls les moments (la masse, l'énergie, la température et éventuellement d'autres moments d'ordre supérieur) interviennent. Il y a diverses méthodes classiques pour passer d'un modèle cinétique à un modèle hydrodynamique : la méthode de développement de Hilbert, la méthode de Chapman-Enskog et la méthode des moments. La littérature sur ces méthodes est abondante et on pourra consulter notamment les références incluses dans [37]. Dans tous les cas, on fait un changement d'échelle qui dépend d'un paramètre ε , qui est tel que lorsque ε tend vers 0, on atteint l'équilibre thermodynamique (régime dans lequel sont valables les modèles hydrodynamiques). Il existe essentiellement deux changements d'échelle possibles. On considère l'équation

$$\varepsilon^\alpha \partial_t f + v \nabla_x \cdot f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f) \quad (1.3.1)$$

avec Q un noyau de collision et α qui vaut 0 dans le cas de la limite fluide et 1 dans le cas de la limite diffusive. Lorsque, comme c'est le cas ici, la distribution d'équilibre a un moment d'ordre 1 nul (de part la symétrie radiale), la partie transport des équations obtenues dans le cas de la limite fluide est triviale. C'est pourquoi on a choisi ici d'étudier une limite diffusive.

L'idée de la méthode des moments consiste à intégrer l'équation (1.3.1) en vitesse après l'avoir préalablement multipliée par $1, v, |v|^2, \dots$, pour obtenir des équations sur les différents moments de la solution f . Lorsqu'il n'y a pas d'évaporation, la conservation des moments (1.2.7) implique l'annulation du second membre pour les 3 premiers moments. On obtient un système d'une infinité d'équations (une pour chaque moment), chacune faisant intervenir deux moments successifs. On se restreint en général aux 3 premières équations et on obtient un système que l'on clôt en utilisant le fait que lorsqu'on est proche de l'équilibre thermodynamique la solution f est proche d'une Maxwellienne.

L'idée des méthodes de Hilbert et de Chapman-Enskog est de partir du fait que la solution f est proche d'une Maxwellienne et chercher un développement asymptotique en ε de la solution. Pour la méthode de Hilbert on se donne un développement de f que l'on injecte dans l'équation et on identifie selon les puissances de ε . Pour la méthode de Chapman-Enskog on trouve la solution pour ε nul : la Maxwellienne \mathcal{M} dont la solution f est proche. On écrit $f = \mathcal{M} + \varepsilon f_1$ avec f_1 le reste et on détermine l'équation vérifiée par le reste. Ensuite on recommence, on résout l'équation vérifiée par f_1 lorsque ε est nul et on écrit $f_1 = g + \varepsilon f_2$. On obtient au fur et à mesure le développement asymptotique de f . Grâce à ce développement on peut clore les équations sur les moments.

Au chapitre 5 on regarde ce que donne la méthode de Chapman-Enskog lorsqu'il

y a de l'évaporation avec une vitesse d'échappement R constante. J'ai d'abord essayé avec le noyau de collision Q_L de Landau puis, pour simplifier, avec le noyau Q_{FP} de type Fokker-Planck défini par (1.2.14). Finalement, la bonne idée consiste à choisir un noyau de collision encore plus simple de type BGK :

$$Q_{BGK}(f) = f - \mathcal{E}_f$$

qui oblige la solution f à converger vers une distribution « d'équilibre » \mathcal{E}_f qui évolue avec le temps à cause de l'évaporation. C'est la Maxwellienne qui a, pour tout temps t , la même densité de masse m_f et la même densité de température θ_f que la solution f . Cette Maxwellienne ne s'annulant pas au bord du domaine de vitesse et pour des raisons pratiques, on n'impose pas de condition de Dirichlet homogène. Cependant une évaporation a quand même lieu puisque f cherche à se rapprocher d'une distribution qui, sur \mathbb{R}^3 tout entier, a la même densité de masse et la même densité de température mais qui a donc, sur B_R , des densités moindres.

Pour simplifier, on travaille sur un domaine périodique $\mathbb{T} := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ en espace et on cherche un développement asymptotique en ε de la solution f_ε du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_\varepsilon(t, x, v) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot f_\varepsilon(t, x, v) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{E}_{f_\varepsilon} - f_\varepsilon), \\ f_\varepsilon|_{t=0} = f_0, \\ \mathcal{E}_{f_\varepsilon}(t, v, x) = \frac{m_{f_\varepsilon}(t, x)}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon}(t, x))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}(t, x)}}. \end{array} \right. \quad (1.3.2)$$

Les équations (5.3.8), (5.3.9) et (5.3.10) que l'on obtient formellement contiennent toujours un terme de relaxation et on ne peut pas passer à la limite en ε .

Dans le chapitre 5 on étudie également l'équation homogène en espace

$$\partial_t f = \mathcal{E}_f - f$$

pour laquelle il est facile de montrer l'existence de solutions régulières. Elle a le mérite d'être simple et il n'est pas difficile d'obtenir un développement asymptotique à tout ordre de la température Θ_f qui vérifie une simple équation différentielle ordinaire. On retrouve ainsi facilement les équivalents que l'on avait trouvés pour le modèle du chapitre 2. Le modèle obtenu est toutefois (formellement) asymptotiquement proche du modèle initial tout en étant plus simple car à l'échelle macroscopique.

Première partie

Modèle de Landau homogène avec évaporation

Chapitre 2

Problème de Cauchy et comportement asymptotique du modèle avec potentiel Maxwellien et symétrie radiale

Ce chapitre reprend le texte de l'article intitulé « Evaporation law in kinetic gravitational systems described by simplified Landau Models » écrit en collaboration avec Pierre-Henri Chavanis, Mohammed Lemou et Florian Méhats et publié dans le journal DCDSB numéro 14, volume 3, p 907–934, année 2010.

2.1 Introduction

2.1.1 General model

At the kinetic level, the evolution of the distribution function $f(x, v, t)$ of a stellar system accounting for evaporation is usually described by the Vlasov-Landau-Poisson equation, see for instance [6, 36, 25, 16]. This model has the following dimensionless

form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla \phi \cdot \nabla_v f = \\ \quad \nabla_v \cdot \int |v - v_*|^{\gamma+2} \Pi(v - v_*) (f(x, v_*) \nabla_v f(x, v) - f(x, v) \nabla_v f(x, v_*)) dv_*, \\ \Delta \phi = \int f dv, \quad \phi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \\ f(x, v, t = 0) = f_0(x, v) \geq 0, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(x, v, t) = 0, \quad \text{if } e := \frac{|v|^2}{2} + \phi(x, t) \geq 0, \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

where $\phi(x, t)$ is the gravitational potential and $\Pi(u)$ is the following 3×3 matrix

$$\Pi(u)_{ij} = \frac{|u|^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{|u|^2}, \quad (2.1.2)$$

which is also the matrix of the orthogonal projection on $(\mathbb{R}u)^\perp$. The parameter γ may take different values in $[-3, 1]$ depending on the particle interaction law. For power-law interactions in $\frac{1}{r^s}$ we have:

$$\gamma := \frac{s - 5}{s - 1}.$$

- For Coulombian (plasmas) and Newtonian (stellar systems) interactions, the most interesting but also the most difficult cases, $s = 2$ and $\gamma = -3$.
- For Maxwellian potential, the case we study in this paper, $s = 5$ and $\gamma = 0$.
- Potentials for $0 < \gamma < 1$ ($s > 5$) are called hard potentials.
- Potentials for $-3 < \gamma < 0$ ($2 < s < 5$) are called soft potentials.

This model accounts for the evaporation of stars since the distribution function must vanish wherever $|v|^2/2 + \phi(x, t) > 0$. This is different from the usual Landau equations of plasma physics where no such condition is required since the system is spatially homogeneous (due to electrical neutrality) and the distribution function evolves on the whole velocity domain. The last condition in (2.1.1) expresses the fact that stars with positive energy are lost by the system. Indeed, the escape velocity of a star at a position x is reached when its microscopic kinetic energy exactly balances its potential energy: $|v_{\text{escape}}| = \sqrt{-2\phi(x)}$. The Vlasov-Landau-Poisson system (2.1.1) is the standard model of stellar dynamics, but to our knowledge, there is no mathematical study (well-posedness, long time behavior, etc) of this model in the

literature. The complexity of this model relies on two facts: the coupling with the Poisson equation, and the vanishing boundary condition due to evaporation.

Because of its mathematical complexity, we shall make several simplifying assumptions. We first assume a spatially homogeneous configuration which allows to remove the transport part and the coupling with the Poisson equation. However, we shall take into account the evaporation process in the following manner. In a real cluster, the average value of the squared escape velocity is $\langle v_{\text{escape}}^2 \rangle = -2\langle \phi(x) \rangle = -2 \int \rho \phi dx / \int \rho dx = -4W/M$ where $W = \frac{1}{2} \int \rho \phi dx$ is the potential energy and $M = \int \rho dx$ the mass (the spatial density is $\rho(x) = \int f(x, v) dv$). On the other hand, for a power-law interaction in $\frac{1}{r^s}$, the virial theorem reads $2K + (s-1)W = 0$ (for $s \neq 1$) where $K = \frac{1}{2} \int f v^2 dx dv$ is the kinetic energy (see [6]). Therefore, $\langle v_{\text{escape}}^2 \rangle = \frac{4}{s-1} \langle v^2 \rangle$. For a Maxwellian potential ($s = 5$), this relation becomes $\langle v_{\text{escape}}^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$. Therefore, within the homogeneity assumption, we have to solve the Landau equation with the boundary condition $f(t, v) = 0$ for $v > v_{\text{escape}}(t)$ where $v_{\text{escape}}(t) = \frac{2}{\sqrt{s-1}} \langle v^2 \rangle^{1/2}$ and $\langle v^2 \rangle = \int f v^2 dv / \int f dv$. In this paper, we shall replace the time dependent boundary condition by the time independent boundary condition $f(t, v) = 0$ for $v > v_{\text{escape}}$ where v_{escape} is a fixed constant. In conclusion, we are led to the homogeneous Landau equation on a bounded velocity domain B_R , which is the open ball of \mathbb{R}^3 of radius $R > 0$ centered at the origin. The distribution function f satisfies:

$$\partial_t f(t, v) = Q_R(f, t, v), \quad (2.1.3)$$

where Q_R is the collision operator given by:

$$Q_R(f, t, v) := \nabla \cdot \int_{B_R} |v - v_*|^{\gamma+2} \Pi(v - v_*) (f(t, v_*) \nabla f(t, v) - f(t, v) \nabla f(t, v_*)) dv_*. \quad (2.1.4)$$

The divergence and the gradient are taken in the v variable. We add to this equation an initial condition:

$$f(0, \cdot) = f_0 \text{ on } B_R, \quad (2.1.5)$$

and a Dirichlet condition on the velocity domain:

$$f(t, v) = 0 \text{ for } v \in \partial B_R. \quad (2.1.6)$$

If $R = +\infty$, we shall refer to this model as the classical Landau equation, which has been widely studied by the mathematical community, see [37] and the references therein. In these works the well-posedness of the Cauchy problem for $R = +\infty$ usually relies on conservation and entropy properties satisfied by the model in this case, namely:

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_\infty(f)(1, v, |v|^2)^T dv = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f \log(f) dv \right) = \int_{\mathbb{R}^3} Q_\infty(f)(1 + \log(f)) dv \leq 0.$$

In the case $R < +\infty$, which is our concern in this paper, the crucial entropy inequality (second inequality above) is no longer available. Therefore, one has to find new *a priori* estimates to establish the wellposedness of the problem in this case.

In this paper, we study the problem (2.1.3) in the case of Maxwellian molecules ($\gamma = 0$) and isotropic distribution functions. Note that if we further assume $R = +\infty$, then the problem (2.1.3)-(2.1.4) can be solved explicitly in this case, see [30, 37]. Here we focus on the case $R < +\infty$ where no such explicit solutions are known. Our goal is two folds: prove the well-posedness of the problem and establish the $1/\log(t)$ evaporation law for this system.

2.1.2 Evaporation laws

A well known simplifying approximation of the Landau equation (2.1.3) was proposed in the 1940' by Chandrasekhar [14]. It essentially assumes that the star under consideration has encounters with a separate group of stars having a fixed (usually assumed Maxwellian) velocity distribution, leading to a Fokker-Planck type equation. In other words, the Fokker-Planck equation considered by Chandrasekhar describes the evolution of a “test star” in a bath of “field stars” at statistical equilibrium with fixed temperature (canonical description). By contrast, the Landau equation describes the evolution of the system as a whole and conserves the energy when $R = \infty$ (microcanonical description). Therefore, Chandrasekhar models the evolution of the system by a Fokker-Planck equation of the form:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial t}(v, t) = Q_R^{FP}(f)(v) = \nabla \cdot [D(|v|) (\nabla f(v) + \beta f(v)v)], & v \in B_R, \\ f(v, t = 0) = f_0(v) \geq 0, & v \in B_R, \\ f(v, t) = 0, & \text{if } |v| = R, \end{array} \right. \quad (2.1.7)$$

where $D(|v|)$ is some given nonnegative diffusion matrix. The Fokker-Planck equation (2.1.7) can be derived from the Landau equation (2.1.3) by making the so-called “thermal bath approximation”, i.e. by replacing the function $f(v_*)$ in (2.1.4) by the Maxwell distribution $f(v) = \rho(2\pi T)^{-3/2} \exp(-v^2/2T)$. Chandrasekhar solved the problem perturbatively and showed that the solution $f_R(v, t)$ goes to zero exponentially as $t \rightarrow +\infty$ with a fundamental eigenmode of the form $f_R(v) e^{-|\lambda(R)|t}$. However, there is no quantification of the escape rate $\lambda(R)$ for given $R > 0$ and only its asymptotic value in the limit of large R was exhibited. Recently, this work was complemented by [17], where an exact integral formula for the eigenvalue $\lambda(R)$ of (evaporation rate) was found, for any given R .

Let us come back to the original Landau model (2.1.3)-(2.1.4) in which, for all the sequel, we shall take $\gamma = 0$ ($s = 5$). Moreover, we will consider only spherically symmetric distribution functions. This framework is compatible with the invariance of the Landau equation (2.1.3) under any orthogonal transformation in velocity. With these assumptions, one can derive after elementary calculations a very simple formulation of the Landau model which keeps the whole structure of the original equation. Indeed, denoting

$$g\left(t, \frac{|v|^2}{2}\right) = f(t, v),$$

the collision operator (2.1.4) becomes

$$\nabla \cdot \int_{B_R} |v - v_*|^2 \Pi(v - v_*) (v g_* \partial_v g - v_* g \partial_{v_*} g) dv_*,$$

where g stands for $g\left(t, \frac{|v|^2}{2}\right)$ and g_* for $g\left(t, \frac{|v_*|^2}{2}\right)$. Moreover,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |v - v_*|^2 \Pi(v - v_*) v g_* dv_* &= \int_{B_R} |v - v_*|^2 \Pi(v - v_*) v_* g_* dv_* \\ &= \int_{B_R} (|v - v_*|^2 v_* - ((v - v_*) \cdot v_*) (v - v_*)) g_* dv_* \\ &= \int_{B_R} (|v_*|^2 v - (v \cdot v_*) v_*) g_* dv_* \\ &= \frac{2}{3} \left(\int_{B_R} |v_*|^2 g_* dv_* \right) v, \\ \int_{B_R} |v - v_*|^2 \Pi(v - v_*) v_* \partial_{v_*} g_* dv_* &= \frac{2}{3} \left(\int_{B_R} |v_*|^2 \partial_{v_*} g_* dv_* \right) v \\ &= -2 \left(\int_{B_R} g_* dv_* \right) v. \end{aligned}$$

Rewriting the result with the function f yields, up to the rescaling in time $t' = \frac{2}{3}t$:

$$\partial_t f(t, v) = Q_R(f, f)(t, v) \quad (2.1.8)$$

with:

$$Q_R(f, g)(t, v) := \nabla \cdot (E_g(t) \nabla f(t, v) + 3v M_g(t) f(t, v)),$$

where M_f and E_f , the mass and the energy of f , are defined by:

$$M_f(t) = \int_{B_R} f(t, v) dv, \quad E_f(t) = \int_{B_R} f(t, v) |v|^2 dv. \quad (2.1.9)$$

We shall see that this model gives rise to completely different behaviors compared to the Chandrasekhar model described above.

Remark 1. This type of collision operator has already been introduced for instance in [11] in the case of a Vlasov-Fokker-Planck equation, the difference here is the homogeneous Dirichlet condition in the velocity variable.

Remark 2. As discussed in [27, 17], when spatial inhomogeneity is ignored, the Chandrasekhar model (2.1.7) provides a better physical description of star escape than the homogeneous Landau model (2.1.3). This is because the thermal bath approximation takes into account the equilibration between evaporation (leading to cooling) and core concentration (leading to heating) resulting in an isothermal distribution. Therefore, the real mass decay of star clusters is exponential as in the Chandrasekhar model. However, on a mathematical point of view, the study of the homogeneous Landau model provides a first step towards the general inhomogeneous model (2.1.1) and is therefore interesting in this respect.

In this paper we first prove the existence and uniqueness of classical solution to the Cauchy problem (2.1.8)-(2.1.5)-(2.1.6), if the initial condition is sufficiently regular. Then we prove that the mass of the solution decreases to a positive constant and that its energy decreases to 0, and give their exact asymptotic behavior for large time. In particular we shall prove that the evaporation shape of the system (when modeled by (2.1.8)-(2.1.5)-(2.1.6)) is in $O(1/\log(t))$ for large time, in contrast with the Chandrasekhar model (2.1.7) where the evaporation holds exponentially. This leads to the convergence of $f(v, t)$ to a Dirac distribution in velocity when time goes to infinity. In the last part of this paper, we construct a suitable numerical discretization that inherits the main properties from the continuous model and whose simulations clearly illustrate our theoretical results. This is a first step towards the mathematical study of the more physically relevant model (2.1.1).

2.1.3 Notations and definitions

We list here some notations and definitions that will be used throughout this paper.

Our classical solutions are defined on the closed domain:

$$D := [0, +\infty[\times \overline{B_R}.$$

We shall also work on a bounded-in-time domain, to establish *a priori* estimates on a finite time interval $[0, T]$. The domain of definition becomes:

$$D_T := [0, T] \times \overline{B_R}.$$

Classical solutions are functions of $\mathcal{C}^{1,2}(D)$ or $\mathcal{C}^{1,2}(D_T)$ i.e. functions on D or D_T which are \mathcal{C}^1 in the time variable and \mathcal{C}^2 in the velocity variable and that verify Eq.

(2.1.8) in the classical sense. However, to prove the existence of classical solutions we need more regularity and we work with Friedman's Hölder-type Banach space $B^\ell(D_T)$ for $\ell \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$, defined by the norm (see [23]):

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^\ell} := & \sup_{\substack{0 < t < T \\ v \in B_R}} \sum_{|\alpha|+2r \leq [\ell]} |\partial_t^r \partial_v^\alpha f(t, v)| \\ & + \sup_{\substack{0 < t < T \\ v, w \in B_R, v \neq w}} \sum_{|\alpha|+2r = [\ell]} \frac{|\partial_t^r \partial_v^\alpha f(t, v) - \partial_t^r \partial_v^\alpha f(t, w)|}{|v - w|^{\ell - [\ell]}} \\ & + \sup_{\substack{0 < s < t < T \\ v \in B_R}} \sum_{|\alpha|+2r = [\ell]} \frac{|\partial_t^r \partial_v^\alpha f(t, v) - \partial_t^r \partial_v^\alpha f(s, v)|}{|t - s|^{\frac{\ell - [\ell]}{2}}} \end{aligned}$$

where $[\ell]$ is the integer part of ℓ and $\alpha \in \mathbb{N}^3$. The space $B^\ell(\overline{B_R})$ is defined with a similar norm in which the t variable is omitted. We shall also consider weak solutions in the space:

$$X_T := \mathcal{C}([0, T], \mathbb{L}^2(B_R)) \cap \mathbb{L}^2([0, T], H_0^1(B_R)) \cap H^1([0, T[, H^{-1}(B_R)), \quad (2.1.10)$$

with the norm:

$$\|f\|_T := \|f\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{L}^2(B_R))} + \|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{L}^2(B_R))} + \|\partial_t f\|_{\mathbb{L}^2([0, T], H^{-1}(B_R))}. \quad (2.1.11)$$

By weak solutions, we mean solutions satisfying equation (2.1.8) for almost every t , in $H^{-1}(B_R)$, the condition (2.1.6) for a.e. t in the sense of traces and (2.1.5) in $\mathbb{L}^2(B_R)$.

2.2 Theoretical Results

2.2.1 Main result

Our main result in this paper is the following:

Theorem 2.2.1. *Let $\ell \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$ and let $f_0 \in B^{\ell+2}(B_R)$ be a nonnegative and nonzero initial condition. Then, there exists a unique nonnegative classical solution f in $B^{\ell+2}(D)$ to the problem (2.1.8), (2.1.6), (2.1.5).*

Moreover, the mass and energy of f defined by (2.1.9) are \mathcal{C}^1 , positive, nonincreasing functions, and satisfy:

i. a conservation law:

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad R^2 M_f(t) - E_f(t) = R^2 M_{f_0} - E_{f_0} > 0, \quad (2.2.1)$$

ii. a non-zero mass limit:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_f(t) = M_{f_0} - \frac{E_{f_0}}{R^2} =: M_\infty > 0, \quad (2.2.2)$$

iii. a logarithmic evaporation:

$$E_f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3M_\infty R^2}{2 \log t}. \quad (2.2.3)$$

In particular, the distribution function $f(t, \cdot)$ converges narrowly as $t \rightarrow +\infty$ to the Dirac distribution function $M_\infty \delta_{v=0}$.

Remark 3. We do not ask f_0 to be radial since it is not necessary to prove the result, but of course the result given by Theorem 2.2.1 in the case where f_0 is not radial has no physical meaning because it does not correspond to the model.

Remark 4. In a future work [9], we will study the self-similar behavior of the solution f . It appears that f admits a Maxwellian self-similar profile.

The proof of Theorem 2.2.1 is given in Section 2.2.3. In Section 2.2.2 we give some estimates that are useful in Section 2.2.3 to prove existence and uniqueness of solutions. The proof of (2.2.3) is divided in two parts: in the second part of Section 2.2.3 we prove that:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} E_f(t) \log t \leq \frac{3M_\infty R^2}{2}, \quad (2.2.4)$$

then in the last part of Section 2.2.3 we prove that:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} E_f(t) \log t \geq \frac{3M_\infty R^2}{2}. \quad (2.2.5)$$

The end of the proof is given in the first part of Section 2.2.3.

2.2.2 Basic estimates

To prove existence and uniqueness of weak solutions, we need some basic estimates which we develop in this section.

Ellipticity

To prove the ellipticity of the parabolic operator, we need a lower bound on the energy. This is obtained in two steps: First, Lemma 2.2.2 says that a positive lower

bound for the energy can be found from a positive lower bound of the mass and an upper bound of the \mathbb{L}^2 norm. Second, we use the conservation law (2.2.1) to get a lower bound for the mass. In Lemma 2.2.3 we prove this minoration even in the more general case where the mass and the energy involved in the model are computed from a given function g that can be different from the solution f . This slight extension will be used in our fixed point proof.

Lemma 2.2.2. *Let $f \in \mathbb{L}^2(B_R)$ be a nonnegative and nonzero function. Then there exists a universal constant $C > 0$ such that:*

$$E_f \geq C \|f\|_{\mathbb{L}^2}^{-\frac{4}{3}} M_f^{\frac{7}{3}}.$$

Proof. Setting:

$$r := \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{7}} \|f\|_{\mathbb{L}^2}^{-\frac{2}{7}} E_f^{\frac{2}{7}}.$$

we have:

$$\begin{aligned} M_f &= \int_{B_r} f(v) dv + \int_{B_R \setminus B_r} f(v) dv \leq |B_r|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathbb{L}^2} + \frac{1}{r^2} E_f \\ &\leq 2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{7}} E_f^{\frac{3}{7}} \|f\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{4}{7}} \end{aligned}$$

and the result follows. \square

Lemma 2.2.3. *Let $T > 0$, $g \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{L}^2(B_R))$ be a nonnegative function and let f be a function in $\mathcal{C}^{1,2}(D_T)$ which satisfies (2.1.6), (2.1.5), where f_0 is a nonzero and nonnegative function in $\mathbb{L}^2(B_R)$. Assume in addition that:*

$$\partial_t f = Q_R(f, g). \quad (2.2.6)$$

Then, f is nonnegative and we have:

$$R^2 M_f(t) - E_f(t) \geq (R^2 M_{f_0} - E_{f_0}) e^{-6 \int_0^t M_g(s) ds}.$$

In particular, M_f is bounded from below by a positive constant. Moreover, the function $t \mapsto M_f(t)$ is nonincreasing. Finally, if we assume additionally that $f = g$, then we have the conservation law (2.2.1) and the function $t \mapsto E_f(t)$ is also nonincreasing.

Proof. It is classical (see [23] for instance) that f is nonnegative as a solution to a linear parabolic equation with continuous coefficients, homogeneous Dirichlet boundary condition and nonnegative initial condition. We now compute the derivatives of

M_f and E_f . We have

$$\begin{aligned} M'_f(t) &= \int_{B_R} \nabla \cdot (E_g(t) \nabla f(t, v) + 3v M_g(t) f(t, v)) dv \\ &= E_g(t) \int_{\partial B_R} \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} d\sigma(v), \end{aligned}$$

with σ the measure on ∂B_R . This last quantity is nonpositive because f is non-negative on B_R and vanishes on ∂B_R and then the scalar product $\nabla f(t, \cdot) \cdot \frac{v}{|v|}$ is nonpositive. Thus, the mass is nonincreasing. Next, we have

$$\begin{aligned} E'_f(t) &= \int_{B_R} \nabla \cdot (E_g(t) \nabla f(t, v) + 3v M_g(t) f(t, v)) v^2 dv \\ &= R^2 E_g(t) \int_{\partial B_R} \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} d\sigma(v) \\ &\quad - 2 \int_{B_R} (E_g(t) \nabla f(t, v) \cdot v + 3M_g(t) f(t, v) v^2) dv. \end{aligned}$$

An integration by parts yields

$$\int_{B_R} \nabla f(t, v) \cdot v dv = -3 \int_{B_R} f(t, v) dv,$$

and then

$$E'_f(t) = R^2 E_g(t) \int_{\partial B_R} \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} d\sigma(v) + 6(M_f(t) E_g(t) - M_g(t) E_f(t)).$$

In the special case where $f = g$, we have

$$E'_f(t) = R^2 E_f(t) \int_{\partial B_R} \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} d\sigma(v) = R^2 M'_f(t) \quad (2.2.7)$$

from which we deduce (2.2.1). In the general case, we only have

$$\begin{aligned} R^2 M'_f(t) - E'_f(t) &= -6(M_f(t) E_g(t) - M_g(t) E_f(t)) \\ &\geq -6M_g(t) (R^2 M_f(t) - E_f(t)), \end{aligned}$$

and the use of Gronwall's lemma completes the proof. \square

\mathbb{L}^2 -estimates

We use classical \mathbb{L}^2 -estimates techniques for parabolic operators to derive the necessary estimates that will be used in fixed point proof. We give, for the solutions of (2.2.6), $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)$ -estimates and estimates for the norm $\|\cdot\|_T$ defined by (2.1.11).

Lemma 2.2.4. *Let $T > 0$ and f , f_0 and g be as in Lemma 2.2.3. Then we have the two following results.*

i. *Let M be an upper bound of M_g , then there exists a positive constant C which depends only on T and M such that*

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)} \leq C\|f_0\|_{\mathbb{L}^2}.$$

ii. *Let β be an upper bound of $\|g\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)}$ and suppose that there exists a positive lower bound m of M_g . Then there exists a positive constant C which depends only on R , T , m and β such that*

$$\|f\|_T \leq C\|f_0\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Remark 5. As a corollary of this Lemma together with Lemma 2.2.3, we infer that any solution f of (2.1.8), (2.1.5) and (2.1.6) satisfies

$$M_f(t) \leq M_{f_0}, \quad \|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)} \leq \|f_0\|_{\mathbb{L}^2}. \quad (2.2.8)$$

Proof. Let us prove (i). We have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B_R} f^2(t, v) dv &= 2 \int_{B_R} f(t, v) \nabla \cdot (E_g(t) \nabla f(t, v) + 3v M_g(t) f(t, v)) dv \\ &= -2E_g(t) \int_{B_R} |\nabla f(t, v)|^2 dv - 6M_g(t) \int_{B_R} f(t, v) \nabla f(t, v) \cdot v dv \\ &= -2E_g(t) \int_{B_R} |\nabla f(t, v)|^2 dv - 3M_g(t) \int_{B_R} \nabla(f^2(t, v)) \cdot v dv. \end{aligned}$$

and finally

$$\frac{d}{dt} \int_{B_R} f^2(t, v) dv = -2E_g(t) \int_{B_R} |\nabla f(t, v)|^2 dv + 9M_g(t) \int_{B_R} f^2(t, v) dv. \quad (2.2.9)$$

Thus

$$\frac{d}{dt} (\|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2) \leq 9M\|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

and (i) is proved by Gronwall's lemma. Now let us prove (ii). First we use (i) with $M := \beta|B_R|^{\frac{1}{2}}$. Then, from Lemma 2.2.2, there exists a positive constant k such that

$$E_g \geq k\beta^{-\frac{4}{3}}m^{\frac{7}{3}}.$$

Integrating (2.2.9) yields

$$\|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2([0, T] \times B_R)} \leq C_1\|f_0\|_{\mathbb{L}^2(B_R)}, \quad (2.2.10)$$

where C_1 is a constant which depends only on R , T , m and β . Now let us take $\varphi \in H_0^1(B_R)$. As f is solution of (2.2.6), we have

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \partial_t f(t, v) \varphi(v) dv &= -E_g(t) \int_{B_R} \nabla f(t, v) \cdot \nabla \varphi(v) dv \\ &\quad - 3M_g(t) \int_{B_R} f(t, v) v \cdot \nabla \varphi(v) dv. \end{aligned}$$

By Cauchy-Schwarz, $E_g(t) \leq R^2 M_g(t) \leq R^2 |B_R|^{\frac{1}{2}} \beta$. Moreover, by the Poincaré's inequality, there exists a constant C_R such that $\|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_R \|\nabla f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}$. Hence we have

$$\|\partial_t f(t, \cdot)\|_{H^{-1}} \leq C_2 \|\nabla f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}, \quad (2.2.11)$$

with C_2 a constant which depends only on R , T , m and β . Finally, Item (ii) is proved by integrating (2.2.11) between 0 and T and using (i) and (2.2.10). \square

Remark 6. The estimates used to prove (2.2.11) can be written in the following way:

$$\left| \int_{B_R} Q_R(f, g)(t, v) h(t, v) dv \right| \leq C_R \|\nabla f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \|g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^1} \|\nabla h(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}, \quad (2.2.12)$$

with C_R depending only on R .

2.2.3 Proof of the main result

This section is devoted to the proof of Theorem 2.2.1.

Existence and uniqueness of a classical solution

Let $T > 0$ be fixed once for all and let $f_0 \in B^{\ell+2}$, with $\ell \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$, be nonzero and nonnegative. Estimates of Lemmas 2.2.3 and 2.2.4 allow us to prove the existence and uniqueness of a classical solution of (2.1.8), (2.1.6), (2.1.5) on $[0, T]$, using Picard-Banach fixed point theorem. We use the norm $\|\cdot\|_T$ defined by (2.1.11). To obtain a contraction mapping we shall work on an interval $[0, T_0]$ where $T_0 \in [0, T]$ whose value will be chosen later. We know from the first part of Lemma 2.2.4 that there exists a constant C_1 which depends only on T and M_{f_0} such that if f and g satisfy the assumptions of Lemma 2.2.3 and if $M_g \leq M_{f_0}$ then

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)} \leq C_1 \|f_0\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Let

$$m := M_\infty e^{-6M_{f_0}T},$$

with M_∞ defined by (2.2.2) and

$$\beta := \max(C_1 \|f_0\|_{\mathbb{L}^2}, M_{f_0} |B_R|^{-\frac{1}{2}}).$$

From the second part of Lemma 2.2.4, there exists a constant C_2 which depends only on R , T and $\|f_0\|_{\mathbb{L}^2}$ such that, if $\|g\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)} \leq \beta$ and $M_g \geq m$,

$$\|f\|_{T_0} \leq C_2 \|f_0\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Let

$$K := \max(C_2 \|f_0\|_{\mathbb{L}^2}, \beta),$$

and consider the set F defined by

$$F := \{g \in B^{\ell+2}(D_{T_0}) : g \text{ nonnegative}, m \leq M_g \leq M_{f_0}, \|g\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)} \leq \beta, \|g\|_{T_0} \leq K\}.$$

For T_0 small enough, it is nonempty because, as $\beta \geq M_{f_0} |B_R|^{-\frac{1}{2}}$ and $K \geq \beta$, it contains some constant functions. For $g \in F$, M_g and E_g are Hölder continuous functions of time and we know from Lemma 2.2.2 that E_g is bounded from below by a positive constant λ which depends only on R , T , $\|f_0\|_{\mathbb{L}^2}$ and $R^2 M_{f_0} - E_{f_0}$. Thus, from classical existence theorem for linear parabolic equations (see [28] or [23]), we know that there exists a unique solution $\Phi(g) \in B^{\ell+2}(D_T)$ to

$$\partial_t(\Phi(g))(t, v) = Q_R(\Phi(g), g)(t, v)$$

which satisfies (2.1.5) and (2.1.6). From Lemmas 2.2.3 and 2.2.4 we have $\Phi(g) \in F$. Let $g, \tilde{g} \in F$, then $\Phi(g) - \Phi(\tilde{g})$ satisfies

$$\begin{aligned} \partial_t(\Phi(g) - \Phi(\tilde{g})) - Q_R(\Phi(g) - \Phi(\tilde{g}), g) &= Q_R(\Phi(\tilde{g}), g - \tilde{g}), \\ \forall(t, v) \in [0, T] \times \partial B_R \quad (\Phi(g) - \Phi(\tilde{g}))(t, v) &= 0, \\ (\Phi(g) - \Phi(\tilde{g}))(0, \cdot) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

For convenience, let us denote $\psi := \Phi(g) - \Phi(\tilde{g})$ and $\chi := g - \tilde{g}$. The calculation used in the proof of Lemma 2.2.4 leads to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B_R} \psi(t, v)^2 dv &= -2E_g(t) \int_{B_R} |\nabla \psi(t, v)|^2 dv + 9M_g(t) \int_{B_R} \psi^2(t, v) dv \\ &\quad + \int_{B_R} Q_R(\Phi(\tilde{g}), \chi)(t, v) \psi(t, v) dv. \end{aligned}$$

Moreover by (2.2.12), there exists a constant C_3 which depends only on R such that

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_R} Q_R(\Phi(\tilde{g}), \chi)(t, v) \psi(t, v) dv \right| &\leq C_3 \|\nabla \Phi(\tilde{g})(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \|\chi\|_{T_0} \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq \lambda \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{C_3^2}{4\lambda} \|\chi\|_{T_0}^2 \|\nabla \Phi(\tilde{g})(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Hence, using $E_g \geq \lambda > 0$, we get

$$\frac{d}{dt} (\|\psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2) + \lambda \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \frac{C_3^2}{4\lambda} \|\chi\|_{T_0}^2 \|\nabla \Phi(\tilde{g})(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 9M_{f_0} \|\psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2. \quad (2.2.14)$$

By Gronwall's Lemma, as $\psi(0, \cdot) = 0$,

$$\|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{L}^2)}^2 \leq \frac{C_3^2}{4\lambda} \|\nabla \Phi(\tilde{g})\|_{\mathbb{L}^2}^2 e^{9M_{f_0}T} \|\chi\|_{T_0}^2. \quad (2.2.15)$$

Then, using again (2.2.14),

$$\|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_4 \|\nabla \Phi(\tilde{g})\|_{\mathbb{L}^2} \|\chi\|_{T_0}, \quad (2.2.16)$$

with C_4 a constant which depends only on $\|f_0\|_{\mathbb{L}^2}$ and $R^2 M_{f_0} - E_{f_0}$.

Now let us fix a function $g_0 \in F$. Applying (2.2.16) with (\tilde{g}, g_0) instead of (g, \tilde{g}) leads to

$$\begin{aligned} \|\nabla \Phi(\tilde{g})\|_{\mathbb{L}^2} &\leq \|\nabla \Phi(g_0)\|_{\mathbb{L}^2} (1 + C_4 \|\tilde{g} - g_0\|_{T_0}) \\ &\leq \|\nabla \Phi(g_0)\|_{\mathbb{L}^2} (1 + 2C_4 K). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Finally, as ψ is solution to (2.2.13), using (2.2.12), (2.2.15) and (2.2.17) we deduce that there exists a constant C_5 which depends only on $\|f_0\|_{\mathbb{L}^2}$ and $R^2 M_{f_0} - E_{f_0}$ such that

$$\|\Phi(g) - \Phi(\tilde{g})\|_{T_0} \leq C_5 \|\nabla \Phi(g_0)\|_{\mathbb{L}^2([0, T_0] \times B_R)} \|g - \tilde{g}\|_{T_0}.$$

Now we can choose T_0 such that

$$C_5 \|\nabla \Phi(g_0)\|_{\mathbb{L}^2([0, T_0] \times B_R)} \leq \frac{1}{2}.$$

With this choice of T_0 , Φ is a contraction mapping in the $\|\cdot\|_{T_0}$ norm. The set F is not closed $\|\cdot\|_{T_0}$, we cannot apply directly Picard-Banach theorem. Nevertheless, taking any $g_0 \in F$ and defining, for $n \in \mathbb{N}$,

$$g_{n+1} := \Phi(g_n),$$

we obtain a sequence which converges to $f \in X_{T_0}$. It is clear that f is a weak solution of (2.1.8). We know from regularity results for linear parabolic equations of [28] that in fact $f \in H^1([0, T_0], \mathbb{L}^2(B_R))$ and using the Sobolev embedding

$$H^1([0, T_0], \mathbb{L}^2(B_R)) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0, \frac{1}{2}}([0, T_0], \mathbb{L}^2(B_R)),$$

we see that M_f and E_f are $\frac{1}{2}$ -Hölder continuous. Therefore, thanks to the Hölder regularity results for linear parabolic equations (see [23, 28]) we conclude that f is a classical solution in $B^{\min(\ell, 1)+2}(D_{T_0})$. Then, by a bootstrap argument, since the

Hölder regularity of the coefficients of (2.1.8) is the same as the Hölder regularity in the t variable of f , $f \in B^{\ell+2}(D_{T_0})$ and f is a classical solution to (2.1.8). Thus, we have constructed a classical solution on $[0, T_0]$. This solution is unique because, if \tilde{f} is a classical solution then $\tilde{f} \in F$ and $\Phi(\tilde{f}) = \tilde{f}$ and then $\tilde{f} = f$. This proves the existence of a local solution but also the fact that the set of $t \in [0, T]$ such that there exists a unique solution on $[0, t]$ is open and non empty. This set is also closed thanks to the global estimates on $[0, T]$ in the weak norm $\|\cdot\|_T$, the injection

$$\mathbb{L}^2([0, t], H_0^1(B_R)) \cap H^1([0, t[, H^{-1}(B_R)) \hookrightarrow \mathcal{C}([0, t], \mathbb{L}^2(B_R)),$$

and the preceding argument used to recover the Hölder regularity. Thus we can construct a solution on $[0, T]$ and, as T is arbitrary, we conclude that there exists a unique solution f on D .

If f_0 is radial then f is radial. Indeed, if ρ is a orthogonal transformation of \mathbb{R}^3 and if g is defined on D by

$$g(t, v) = f(t, \rho(v)).$$

Then we have

$$\begin{aligned} \partial_t g(t, v) &= \partial_t f(t, \rho(v)) \\ &= E_f(t) \triangle f(t, \rho(v)) + 3M_f(t) \rho(v) \cdot \nabla f(t, \rho(v)) + 9M_f(t) f(t, \rho(v)) \\ &= E_g(t) \triangle g(t, v) + 3M_g(t) \rho(v) \cdot \rho(\nabla g(t, v)) + 9M_g(t) g(t, v) \\ &= Q_R(g, g)(t, v), \end{aligned}$$

$$g(0, v) = f_0(\rho(v)) = f_0(v)$$

and for all $v \in \partial B_R$

$$g(t, v) = f(t, \rho(v)) = 0.$$

As f is unique, we have $f = g$ for any ρ and then f is radial.

Asymptotic upper bound for the energy

In this section we prove the upper bound (2.2.4). It is rather intuitive that when time goes to infinity the energy must converge to 0 as time goes to ∞ and that the solution must converge to a Dirac function at 0 with the mass M_∞ defined in Theorem 2.2.1. Indeed, the diffusion term with the homogeneous Dirichlet boundary condition contributes to the evaporation of particles with highest velocity and the friction term slow down all particles. Thus it should not remain particles with a nonzero velocity. The decrease of the energy can be controled by the decrease of the \mathbb{L}^2 norm, and it is tempting to adapt the proof of the exponential decrease of the \mathbb{L}^2 norm of solution to the heat equation. Actually, it is this kind of idea we use here.

In a first step, we prove that for all $T \geq 0$ there exists a positive constant C which depends only on R and T such that, for all $t \geq T$,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_T^t \frac{E_f(s)}{4R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(s)}} ds \right) \leq C \exp \left(- \int_T^t \frac{E_f(s)}{4R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(s)}} ds \right). \quad (2.2.18)$$

It is clear from Lemma 2.2.2 and Lemma 2.2.3 that E_f does not vanish in finite time. Let $T \geq 0$. Consider, on $[T, +\infty[$, the weighted \mathbb{L}^2 norm

$$F(t) := \int_{B_R} f^2(t, v) w(t, v) dv,$$

with

$$w(t, v) := \exp \left(\frac{3}{2E_f(t)} (v^2 M_f(t) - R^2 M_f(T)) \right).$$

We compute the derivative of F ,

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2 \int_{B_R} f(t, v) \partial_t f(t, v) w(t, v) dv \\ &\quad + \int_{B_R} f^2(t, v) \frac{3}{2} \frac{M_f'(t) v^2 E_f(t) - (v^2 M_f(t) - R^2 M_f(T)) E_f'(t)}{E_f^2(t)} w(t, v) dv. \end{aligned}$$

Using that M_f and E_f are positive and nonincreasing (Lemma 2.2.3) and that $t \geq T$, we can discard the second term and get

$$F'(t) \leq 2 \int_{B_R} f(t, v) \partial_t f(t, v) w(t, v) dv.$$

Writing $Q_R(f, f)$ in a diffusive form, we have

$$\partial_t f(t, v) = E_f(t) \nabla \cdot \left(e^{-\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} \nabla \left(e^{\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} f(t, v) \right) \right),$$

thus

$$F'(t) \leq 2E_f(t) \int_{B_R} f(t, v) \nabla \cdot \left(e^{-\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} \nabla \left(e^{\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} f(t, v) \right) \right) w(t, v) dv.$$

An integration by part leads to

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -2E_f(t) e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(t)}} \int_{B_R} e^{-\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} \left| \nabla \left(e^{\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} f(t, v) \right) \right|^2 dv \\ &\leq -2E_f(t) e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{E_f(t)}} \int_{B_R} \left| \nabla \left(e^{\frac{3M_f(t)v^2}{2E_f(t)}} f(t, v) \right) \right|^2 dv. \end{aligned}$$

Then we use Poincaré's inequality and get

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\frac{E_f(t)}{2R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{E_f(t)}} \int_{B_R} e^{\frac{3M_f(t)v^2}{E_f(t)}} f^2(t, v) dv \\ &\leq -\frac{E_f(t)}{2R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(t)}} F(t). \end{aligned}$$

Grownwall's lemma leads to

$$F(t) \leq F(T) \exp \left(\int_T^t -\frac{E_f(s)}{2R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(s)}} ds \right).$$

Finally, using that

$$\begin{aligned} \|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2} &\leq e^{\frac{3M_f(T)R^2}{4E_f(t)}} \sqrt{F(t)} \leq e^{\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(t)}} \sqrt{F(t)}, \\ E_f(t) &\leq \left(\int_{B_R} |v|^4 dv \right)^{\frac{1}{2}} \|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}, \end{aligned}$$

we get (2.2.18).

Let us now deduce (2.2.4) from (2.2.18). Defining, for $t \geq T$,

$$G(t) := \int_T^t \frac{E_f(s)}{4R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(s)}} ds,$$

we have from (2.2.18)

$$G'(t) e^{G(t)} \leq C.$$

Thus

$$G(t) \leq \log(C(t - T) + 1).$$

As E_f is nonincreasing, the function

$$t \mapsto \frac{E_f(t)}{4R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(t)}}$$

is nonincreasing. Thus

$$\begin{aligned} (t - T) \frac{E_f(t)}{4R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(t)}} &\leq \log(C(t - T) + 1) \\ \frac{E_f(t)}{4R^2} e^{-\frac{3M_f(T)R^2}{2E_f(t)}} &\leq \frac{\log(C(t - T) + 1)}{t - T}. \end{aligned}$$

Let $\varepsilon > 0$ and k defined by

$$k := \min_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{x}{4R^2} e^{\frac{\varepsilon}{x}} = \frac{\varepsilon e}{4R^2}.$$

Then k is positive, depends only on R and ε and we have for all $t \geq T$

$$k \leq \frac{E_f(t)}{4R^2} e^{\frac{\varepsilon}{E_f(t)}}.$$

Thus, for t sufficiently large, we have

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{E_f(t)} \left(\frac{3M_f(T)R^2}{2} + \varepsilon \right)} &\leq \frac{\log(C(t-T) + 1)}{k(t-T)} \\ E_f(t) \log t &\leq \left(\frac{3M_f(T)R^2}{2} + \varepsilon \right) \frac{\log t}{\log(t-T) + \log k - \log(\log(C(t-T) + 1))} \\ \limsup_{t \rightarrow +\infty} E_f(t) \log t &\leq \frac{3M_f(T)R^2}{2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

We have proved the upper bound (2.2.4), which implies in particular that $E_f \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$. Hence, we can deduce from (2.2.1) that M_f decreases to a nonzero limit: we have proved (2.2.2) in Theorem 2.2.1.

Asymptotic lower bound for energy

In this subsection, we prove the lower bound (2.2.5). To bound the energy from below, we need to control the normal derivative of the solution on the boundary. In fact, (2.2.7) shows that the loss of energy is only due to the evaporation and depends on the normal derivative. More precisely the logarithmic derivative of the energy depends only on the normal derivative and we have

$$\frac{E'_f(t)}{E_f(t)} = R^2 \int_{\partial B_R} \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} d\sigma(v).$$

We shall control the normal derivative at time t thanks to a supersolution which vanishes on the boundary at time t . To this purpose, we first need to study an auxiliary function β .

Lemma 2.2.5. *Let f be the solution of (2.1.8), (2.1.6), (2.1.5) and let M_f , E_f be defined by (2.1.9). Consider the unique solution β to the Cauchy problem*

$$\begin{cases} \beta'(t) = 4E_f(t) - 6M_f(t)\beta(t), \\ \beta(0) = \frac{2E_{f_0}}{3M_{f_0}}. \end{cases} \quad (2.2.19)$$

Then β is a positive and nonincreasing function such that

$$i. \quad \frac{2E_f(t)}{3M_f(t)} \leq \beta(t) \leq \frac{2R^2}{3},$$

$$ii. \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0.$$

Proof. It is clear that β is well defined. We know from Lemma 2.2.3 that M_f does not vanish, so we can consider the function

$$g(t) := \beta(t) - \frac{2E_f(t)}{3M_f(t)}.$$

From (2.2.1), we have $M_f(t) = M_\infty + \frac{E_f(t)}{R^2}$ and the function

$$\frac{2E_f(t)}{3M_f(t)} = \frac{2R^2}{3} \left(1 - \frac{R^2 M_\infty}{R^2 M_\infty + E_f(t)} \right)$$

is a nonincreasing function of t because E_f is nonincreasing (Lemma 2.2.3). Thus

$$\beta'(t) \geq 0 \implies g'(t) \geq 0.$$

Furthermore, from (2.2.19) we have

$$g(t) < 0 \iff \beta'(t) > 0.$$

In particular,

$$g(t) < 0 \implies g'(t) > 0.$$

As $g(0) = 0$ we have $g \geq 0$. Indeed, suppose that $t_0 > 0$ is such that $g(t_0) < 0$, define

$$t_1 := \sup\{0 \leq t \leq t_0 : g(t) \geq 0\}$$

We necessarily have $g(t) < 0$ for $t \geq t_1$ and $g(t_1) = 0$ since g is continuous. Thus g is increasing on $[t_1, t_0]$ which contradicts the fact that $g(t_0) < 0 = g(t_1)$. In conclusion we have proved the left inequality in (i) and the fact that β is nonincreasing. We also have the fact that β is positive as E_f is positive (Lemma 2.2.3 and Lemma 2.2.2). To end the proof of (i), we remark that, as β is nonincreasing, we have

$$\beta(t) \leq \frac{2E_{f_0}}{3M_{f_0}} \leq \frac{2M_{f_0}R^2}{3M_{f_0}} \leq \frac{2R^2}{3}.$$

Let us now prove (ii). It suffices to prove that β cannot have a positive lower bound. Assume that $\beta(t) \geq \mu > 0$. Then we have

$$\beta'(t) \leq 4E_f(t) - 6M_\infty\mu.$$

As $E_f(t)$ converges to 0 (see (2.2.4)), there exists $T > 0$ such that for all $t \geq T$, $4E_f(t) \leq 3M_\infty\mu$ and

$$\beta(t) \leq \beta(T) - 3M_\infty\mu(t - T).$$

Since the right-hand side of this inequality becomes negative for large t , this contradicts $\beta(t) \geq \mu > 0$. \square

Now we can define our supersolution. Let $T \geq 0$, on D_T we define the Maxwellian

$$\mathcal{M}_T(t, v) := \frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}}(t)} e^{-\frac{v^2}{\beta(t)}} - \frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}}(T)} e^{-\frac{R^2}{\beta(T)}}, \quad (2.2.20)$$

where the function $\beta(t)$ is defined in Lemma 2.2.5.

Lemma 2.2.6. *Let f be the solution of (2.1.8), (2.1.6), (2.1.5), let $T \geq 0$ and let \mathcal{M}_T be defined by (2.2.20). Then there exists a positive constant α independent of T , such that, for all $t \in [0, T]$ and for all $v \in B_R$, we have*

$$f(t, v) \leq \alpha \mathcal{M}_T(t, v). \quad (2.2.21)$$

In particular, we obtain the following estimate of the normal derivative of f :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{v \in \partial B_R} \left| \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} \right| \leq \frac{2R\alpha}{\beta^{\frac{5}{2}}(t)} e^{-\frac{R^2}{\beta(t)}}. \quad (2.2.22)$$

Proof. In a first step, we shall find a positive constant α independent of T such that

$$f(0, \cdot) \leq \alpha \mathcal{M}_T(0, \cdot). \quad (2.2.23)$$

As β is nonincreasing and lower than $\frac{2R^2}{3}$ (Lemma 2.2.5), the function

$$t \mapsto \frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}}(t)} e^{-\frac{R^2}{\beta(t)}}$$

is nonincreasing and we have $\mathcal{M}_T(0, \cdot) \geq \mathcal{M}_0(0, \cdot)$. The function $\mathcal{M}_0(0, \cdot)$ is positive on B_R and vanishes on ∂B_R . We now claim that $\frac{f_0}{\mathcal{M}_0(0, \cdot)}$ is bounded on B_R . Indeed, for $v \in B_R$, we have

$$\frac{f_0(v)}{\mathcal{M}_0(0, v)} = \frac{\int_{|v|}^R \nabla f_0 \left(\lambda \frac{v}{|v|} \right) \cdot \frac{v}{|v|} d\lambda}{\mathcal{M}_0(0, v)}.$$

Defining

$$\mu = \inf_{0 \leq |v| < R} \frac{e^{-\frac{|v|^2}{\beta(0)}} - e^{-\frac{R^2}{\beta(0)}}}{R - |v|},$$

it is clear that $\mu > 0$ and that we have

$$\left| \frac{f_0(v)}{\mathcal{M}_0(0, v)} \right| \leq \frac{\beta^{\frac{3}{2}}(0)}{\mu} \|\nabla f_0\|_\infty,$$

since $f_0 \in \mathcal{C}^1$. Finally, setting

$$\alpha = \max_{v \in \overline{B}_R} \left| \frac{f_0(v)}{\mathcal{M}_0(0, v)} \right| > 0,$$

we obtain (2.2.23).

In a second step, we shall prove that $\alpha \mathcal{M}_T$ is a supersolution of (2.1.8), (2.1.6), (2.1.5) on D_T . Since we already have (2.2.23) and $\mathcal{M}_T(t, \cdot) = 0$ on ∂B_R , the only hypothesis that we have to check is

$$\partial_t \mathcal{M}_T - Q_R(\mathcal{M}_T, f) \geq 0.$$

A simple calculation gives

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathcal{M}_T - Q_R(\mathcal{M}_T, f))(t, v) &= (2|v|^2 - 3\beta(t))(\beta'(t) + 6M_f(t)\beta(t) - 4E_f(t)) \frac{e^{-\frac{v^2}{\beta(t)}}}{2\beta^{\frac{7}{2}}(t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consequently, $\alpha \mathcal{M}_T$ is a supersolution of (2.1.8), (2.1.6), (2.1.5) on D_T . By applying the maximum principle for linear parabolic equation (see [23] for instance), we get (2.2.21). In particular, since f and $\mathcal{M}_t(t, \cdot)$ vanish on ∂B_R , we have

$$\forall v \in \partial B_R, \quad 0 \leq -\nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} \leq -\alpha \nabla \mathcal{M}_t(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} = \frac{2R\alpha}{\beta^{\frac{5}{2}}(t)} e^{-\frac{R^2}{\beta(t)}},$$

which gives (2.2.22). The proof of Lemma 2.2.6 is complete. \square

As β converges to 0 (Lemma 2.2.5), we deduce from (2.2.22) that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{v \in \partial B_R} \left| \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} \right| = 0. \quad (2.2.24)$$

Estimate (2.2.22) depends on β but β is itself linked to E_f . We are now able to clarify the behavior of β as $t \rightarrow +\infty$.

Lemma 2.2.7. *Let β be defined by (2.2.19), we have*

$$\beta(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2E_f(t)}{3M_\infty}.$$

Proof. We already know from Lemma 2.2.5 that

$$\beta(t) \geq \frac{2E_f(t)}{3M_f(t)}.$$

Thus, as E_f is positive (Lemma 2.2.3 and Lemma 2.2.2), we deduce from (2.2.2) that

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta(t)}{E_f(t)} \geq \frac{2}{3M_\infty}.$$

Let us show that

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta(t)}{E_f(t)} \leq \frac{2}{3M_\infty}. \quad (2.2.25)$$

Let $0 < \varepsilon \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3M_\infty}\right)$, from (2.2.24) we know that there exists $T_1 \geq 0$ such that, for all $t \geq T_1$,

$$\sup_{v \in \partial B_R} \left| \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} \right| \leq \frac{9M_\infty^2 \varepsilon}{16\pi R^4}.$$

For $t \geq T_1$, define

$$g(t) := \frac{\beta(t)}{E_f(t)}.$$

Using (2.2.19) and (2.2.7) we have

$$\begin{aligned} \frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} - \frac{E'_f(t)}{E_f(t)} \\ &= \frac{4E_f(t)}{\beta(t)} - 6M_f(t) - R^2 \int_{\partial B_R} \nabla f(t, v) \cdot \frac{v}{|v|} d\sigma(v). \end{aligned}$$

If $g(t) \geq \frac{2}{3M_\infty} + \varepsilon$ then

$$\frac{4E_f(t)}{\beta(t)} \leq \frac{6M_\infty}{1 + \frac{3M_\infty \varepsilon}{2}} \leq 6M_\infty \left(1 - \frac{3M_\infty \varepsilon}{4}\right),$$

and since $M_\infty \leq M_f(t)$ (Lemma 2.2.3) we have

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \leq -\frac{9M_\infty^2 \varepsilon}{4}.$$

It is clear then, that there exists $T_2 \geq T_1$ such that $g(T_2) \leq \frac{2}{3M_\infty} + \varepsilon$ otherwise we have

$$\forall t \geq T_1 \quad \frac{2}{3M_\infty} + \varepsilon \leq g(t) \leq g(T_1) e^{-\frac{9M_\infty^2 \varepsilon}{4} t},$$

a contradiction. Now, define for $t \geq T_2$

$$h(t) := \frac{2}{3M_\infty} + \varepsilon - g(t).$$

We have proved that $h(t) < 0 \implies h'(t) > 0$ and, by definition, $h(T_2) \geq 0$. We can conclude as in the proof of Lemma 2.2.5 that $h \geq 0$. Finally, for all $t \geq T_2$, we have $g(t) \leq \frac{2}{3M_\infty} + \varepsilon$ and

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta(t)}{E_f(t)} \leq \frac{2}{3M_\infty} + \varepsilon.$$

This proves (2.2.25) and the proof of the lemma is complete. \square

We are now in position to prove (2.2.5). From (2.2.7) and (2.2.22), we deduce

$$\forall t \geq 0 \quad \frac{E'_f(t)}{E_f(t)} \geq -\frac{8\pi R^5 \alpha}{\beta^{\frac{5}{2}}(t)} e^{-\frac{R^2}{\beta(t)}}.$$

Let $0 < \varepsilon < \frac{3M_\infty R^2}{2}$, we have then

$$-\frac{E'_f(t)}{E_f^2(t)} e^{\frac{1}{E_f(t)} \left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon \right)} \leq \frac{8\pi R^5 \alpha e^{R^2 \left(\frac{3M_\infty}{2E_f(t)} - \frac{1}{\beta(t)} \right) - \frac{\varepsilon}{E_f(t)}}}{\beta^{\frac{5}{2}}(t) E_f(t)}.$$

With Lemma 2.2.7, the right-hand side of this inequality tends to 0+ when t grows to infinity and there exists a positive constant C such that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon \right) \frac{E'_f(t)}{E_f^2(t)} e^{\frac{1}{E_f(t)} \left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon \right)} &\leq C, \\ e^{\frac{1}{E_f(t)} \left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon \right)} - e^{\frac{1}{E_{f0}} \left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon \right)} &\leq Ct, \end{aligned}$$

$$E_f(t) \log t \geq \frac{\left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon \right) \log t}{\log \left(Ct + e^{\frac{1}{E_{f0}} \left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon \right)} \right)},$$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} E_f(t) \log t \geq \frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon.$$

The proof of (2.2.5) is complete.

End of the proof

We are ready to end the proof of Theorem 2.2.1. The existence and uniqueness of a smooth solution to (2.1.8), (2.1.6), (2.1.5) have been proved in Section 2.2.3. The conservation law (2.2.1) and the monotonicity of M_f and E_f are given in Lemma 2.2.3. In Section 2.2.3, we have proved the upper bound (2.2.4) and the non-zero mass limit (2.2.2). In Section 2.2.3, we have proved the lower bound (2.2.5). These two bounds imply the logarithmic law (2.2.3). It remains to identify the limit of $f(t, \cdot)$.

The convergence of $f(t, \cdot)$ to $M_\infty \delta_{v=0}$ in the sense of narrow convergence of measures is a standard consequence of the following properties. First, for all $t \geq 0$, $f(t, \cdot)$ is a bounded nonnegative function of $\mathbb{L}^1(B_R)$, whose mass goes to $M_\infty > 0$. Second, the energy $\int_{B_R} f(v) v^2 dv$ converges to zero as $t \rightarrow +\infty$.

2.3 Numerical results

Our goal in this section is to construct a suitable numerical scheme to solve (2.1.8) and provide simulations to illustrate our theoretical results: conservation law (2.2.1) and slow evaporation (2.2.3). We emphasize on the particular attention that should be made concerning the conservation law in the numerical scheme, otherwise the numerical solution would dissipate to 0 as any solution to the heat equation (with zero boundary condition) should do. This conservation should therefore be exactly satisfied by the scheme to avoid this wrong behavior. Conservative schemes for axisymmetric Fokker-Planck-Landau operator without the Dirichlet boundary condition are discussed in [31]. We consider only isotropic (radial) distribution functions so that the problem to simulate is a 1D problem. We construct a scheme that satisfies a discretized version of the conservation law (2.2.1) and ensures the positivity of the distribution function under a CFL condition. The velocity domain $[-R, R]$ is first reduced to $[0, R]$ thanks to the parity property that our scheme inherits from the continuous model. A convergence to a numerical Dirac distribution is shown and the numerical results are coherent with the theoretical behaviors. However, we cannot reach an acceptable numerical stationary state because the convergence to the equilibrium is very slow. It is not surprising since energy governs the dynamics and it decreases very slowly. Anyway, it is clear from simulations that the decrease of energy is not exponential.

2.3.1 Numerical scheme

Notations and definitions

For the numerical scheme we take $R = 1$. To avoid the calculation of the divergence in spherical coordinates at 0, we choose a shifted grid. The velocity step is defined by

$$\Delta v := \frac{2}{2N+1},$$

with $N \in \mathbb{N}^*$. We work with the following set of indices:

$$X := \left[-\frac{2N+1}{2}, \frac{2N+1}{2} \right] \cap \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

The grid is given by

$$v_k := k\Delta v \quad k \in X, \quad t_n := n\Delta t \quad n \in \mathbb{N}.$$

To preserve the parity, we use the following discrete derivative with respect to velocity

$$D_k g_k^n := \begin{cases} \frac{g_{k+\frac{1}{2}}^n - g_{k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta v} & \text{if } -N \leq k \leq N \\ -\frac{g_N^n}{\Delta v} & \text{if } k = N + \frac{1}{2} \\ \frac{g_{-N}^n}{\Delta v} & \text{if } k = -N - \frac{1}{2} \end{cases}$$

We define two different discrete integrals, one uses integer indices, the other uses non-integer indices:

$$I(g_k^n) := \sum_{k=-N+1}^{N-1} g_k^n \Delta v, \quad J(g_k^n) := \sum_{k=-N}^{N+1} g_{k-\frac{1}{2}}^n \Delta v.$$

For $k \in X \setminus \mathbb{Z}$, we define f_k^n an approximation of $f(t_n, v_k)$ where f is the solution of our problem. For convenience we define f_k^n for $k \in X \cap \mathbb{Z}$ by

$$f_k^n := \begin{cases} f_{k+\frac{1}{2}}^n & \text{if } k > 0 \\ f_{k-\frac{1}{2}}^n & \text{if } k < 0 \\ \frac{f_{\frac{1}{2}}^n + f_{-\frac{1}{2}}^n}{2} & \text{if } k = 0 \end{cases} \quad k \in X \cap \mathbb{Z} \quad (2.3.1)$$

The purpose of this definition is to allow an easy-handling formulation of the scheme. In fact, these values are artificial and this definition simply implies that the scheme is excentered coherently with the transport term. For $n = 0$ we use the initial condition

$$f_k^0 := f_0(v_k) \quad k \in X \setminus \mathbb{Z}. \quad (2.3.2)$$

For all $n \in \mathbb{N}$, we have the boundary condition

$$f_{-N-\frac{1}{2}}^n = f_{N+\frac{1}{2}}^n = 0. \quad (2.3.3)$$

The mass and the energy of the numerical solution are defined by

$$M_n := 2\pi J(v_k^2 f_k^n), \quad E_n := 2\pi J(v_k^4 f_k^n). \quad (2.3.4)$$

However, in order to construct a conservative scheme, we introduce a different discretization of the mass and the energy for the coefficients of the equation. We set

$$\tilde{M}_n := -\frac{2\pi}{3} I(v_k^3 D_k f_k^n), \quad \tilde{E}_n := 2\pi I(v_k^4 f_k^n). \quad (2.3.5)$$

The definition of \tilde{M}_n comes from the following reformulation

$$2\pi \int_{-1}^1 f(t, v) v^2 dv = \frac{2\pi}{3} \int_{-1}^1 f(t, v) \frac{d}{dv}(v^3) dv = -\frac{2\pi}{3} \int_{-1}^1 \partial_v f(t, v) v^3 dv.$$

Let us now define our numerical scheme. The solution at step $n+1$ is defined from the solution at step n according to

$$f_k^{n+1} = f_k^n + \frac{\Delta t}{v_k^2} D_k(v_k^2 \tilde{E}_n D_k f_k^n + 3v_k^3 \tilde{M}_n f_k^n). \quad (2.3.6)$$

Properties of the numerical scheme

The above defined numerical scheme satisfies the following properties.

Proposition 2.3.1. *Let f_0 be a continuous nonnegative and even function on $[-1, 1]$ such that $f(-1) = f(1) = 0$. Let $N \geq 3$ and f_k^n defined for $(n, k) \in \mathbb{N} \times X$ by (2.3.6), (2.3.2), (2.3.3) and (2.3.1). Suppose that*

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta v)^2}{9M_0}. \quad (2.3.7)$$

Then the following properties hold:

- i. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in X \quad f_{-k}^n = f_k^n,$
- ii. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in X \quad f_k^n \geq 0,$
- iii. $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_{n+1} \leq M_n \leq M_0,$
- iv. $\forall n \in \mathbb{N} \quad E_{n+1} \leq E_n \leq E_0,$

$$v. \forall n \in \mathbb{N} \quad (1 - \Delta v)^2 M_n - E_n = (1 - \Delta v)^2 M_0 - E_0.$$

Remark 7. Properties (ii) and (iii) give the \mathbb{L}^1 -stability of the scheme.

Remark 8. As $R = 1$, $(1 - \Delta v)^2 \simeq R^2$, (v) is a discrete formulation of (2.2.1).

Proof. The proof of (i) is a simple verification. Let us study the evolution of mass and energy. For convenience we denote

$$g_k^n := v_k^2 \tilde{E}_n D_k f_k^n + 3v_k^3 \tilde{M}_n f_k^n,$$

where \tilde{M}_n and \tilde{E}_n are defined by (2.3.5). Let $n \in \mathbb{N}$. We have

$$\begin{aligned} M_{n+1} - M_n &= 2\pi J(v_k^2(f_k^{n+1} - f_k^n)) \\ &= 2\pi \Delta t \Delta v \sum_{k=-N+1}^N D_k g_{k-\frac{1}{2}}^n \\ &= 2\pi \Delta t \sum_{k=-N+1}^N (g_k^n - g_{k-1}^n) \\ &= 2\pi \Delta t (g_N^n - g_{-N}^n) \\ &= 4\pi \Delta t g_N^n, \end{aligned}$$

and, finally,

$$M_{n+1} - M_n = -4\pi \frac{\Delta t}{\Delta v} v_N^2 \tilde{E}_n f_{N-\frac{1}{2}}^n. \quad (2.3.8)$$

For the energy we have

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 2\pi J(v_k^4(f_k^{n+1} - f_k^n)) \\ &= 2\pi \Delta t \Delta v \sum_{k=-N+1}^N v_{k-\frac{1}{2}}^2 D_k g_{k-\frac{1}{2}}^n \\ &= 2\pi \Delta t (v_{N-\frac{1}{2}}^2 g_N^n - v_{-N+\frac{1}{2}}^2 g_{-N}^n) + 2\pi \Delta t \sum_{k=-N+1}^{N-1} (v_{k-\frac{1}{2}}^2 - v_{k+\frac{1}{2}}^2) g_k^n \\ &= 4\pi \Delta t v_{N-\frac{1}{2}}^2 g_N^n - 4\pi \Delta t \Delta v \sum_{k=-N+1}^{N-1} v_k g_k^n. \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N+1}^{N-1} v_k g_k^n &= \sum_{k=-N+1}^{N-1} v_k^3 \tilde{E}_n D_k f_k^n + 3v_k^4 \tilde{M}_n f_k^n \\ &= 2\pi \Delta v \sum_{k=-N+1}^{N-1} \sum_{k_*=-N+1}^{N-1} (v_k^3 v_{k_*}^4 f_{k_*}^n D_k f_k^n - v_{k_*}^3 v_k^4 f_k^n D_{k_*} f_{k_*}^n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

since it is the sum of the coefficients of an antisymmetric matrix. Thus

$$E_{n+1} - E_n = -4\pi \frac{\Delta t}{\Delta v} v_N^2 (1 - \Delta v)^2 \tilde{E}_n f_{N-\frac{1}{2}}^n. \quad (2.3.9)$$

From (2.3.8) and (2.3.9) we obtain (v). Furthermore, if (ii) is verified up to time n then we have (iii) and (iv) at time n . To finish the proof, we prove (ii) at time $n+1$. For this purpose we bound \tilde{M}_n and \tilde{E}_n with M_0 . First we calculate the difference between \tilde{M}_n and M_n :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_n &= -\frac{2\pi}{3} \sum_{k=-N+1}^{N-1} v_k^3 (f_{k+\frac{1}{2}}^n - f_{k-\frac{1}{2}}^n) \\ &= -\frac{2\pi}{3} (-v_N^3 f_{-N+\frac{1}{2}}^n + v_N^3 f_{N-\frac{1}{2}}^n) - \frac{2\pi}{3} \sum_{k=-N+1}^N (v_{k-1}^3 - v_k^3) f_{k-\frac{1}{2}}^n \\ &= -\frac{4\pi}{3} v_N^3 f_{N-\frac{1}{2}}^n - \frac{2\pi}{3} \sum_{k=-N}^{N+1} \left(-3v_{k-\frac{1}{2}}^2 \Delta v - \frac{1}{4} (\Delta v)^3 \right) f_{k-\frac{1}{2}}^n \\ &= M_n - \frac{4\pi}{3} v_N^3 f_{N-\frac{1}{2}}^n + \frac{\pi}{6} \sum_{k=-N}^{N+1} (\Delta v)^3 f_{k-\frac{1}{2}}^n. \end{aligned}$$

Moreover, as $N \geq 3$, we have

$$\frac{\pi}{6} \sum_{k=-N}^{N+1} (\Delta v)^3 f_{k-\frac{1}{2}}^n \leq \frac{\Delta v}{3} M_n \leq \frac{2}{21} M_n,$$

and

$$\frac{4\pi}{3} v_N^3 f_{N-\frac{1}{2}}^n \leq \frac{2}{3} \frac{N^2}{(N-\frac{1}{2})^2} 2\pi v_{N-\frac{1}{2}}^2 f_{N-\frac{1}{2}}^n \leq \frac{2}{3} \frac{N^2}{(N-\frac{1}{2})^2} M_n \leq M_n.$$

Finally

$$0 \leq \tilde{M}_n \leq \frac{23}{21} M_0.$$

Analogously, it is easy to see that with $N \geq 3$

$$0 \leq \tilde{E}_n \leq \frac{61}{49} M_0.$$

From (2.3.6), we deduce (ii) under the condition that, for all $k \in X$,

$$1 - \tilde{E}_n \frac{v_{k+\frac{1}{2}}^2 + v_{k-\frac{1}{2}}^2}{v_k^2} \frac{\Delta t}{(\Delta v)^2} - 3\tilde{M}_n \frac{v_{k-\frac{1}{2}}}{v_k^2} \frac{\Delta t}{\Delta v} \geq 0.$$

For that, the following condition is sufficient:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta v)^2}{9M_0}.$$

□

The conservation properties imply that the numerical solution converges, when n tends to infinity and for fixed values of Δv and Δt , to a discrete Dirac whereas simpler nonconservative scheme converges to 0. More precisely we have the following result.

Proposition 2.3.2. *Let f_0 be a continuous nonnegative and even function on $[-1, 1]$ such that $f(-1) = f(1) = 0$. Let $N \geq 3$ and f_k^n defined for $(n, k) \in \mathbb{N} \times X$ by (2.3.6), (2.3.2), (2.3.3) and (2.3.1). Assume that $\Delta t \leq \frac{(\Delta v)^2}{9M_0}$ and that*

$$(1 - \Delta v)^2 M_0 - E_0 > 0.$$

Then,

i. for $k \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$, we have

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_k^n = 0$$

and

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\pm \frac{1}{2}}^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_0^n = \frac{(1 - \Delta v)^2 M_0 - E_0}{(1 - \Delta v)^2 \pi (\Delta v)^3 - \frac{\pi}{4} (\Delta v)^5} > 0.$$

ii. Moreover, we have

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n &= \frac{(1 - \Delta v)^2 M_0 - E_0}{(1 - \Delta v)^2 - \frac{1}{4} (\Delta v)^2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n &= \frac{1}{4} (\Delta v)^2 \frac{(1 - \Delta v)^2 M_0 - E_0}{(1 - \Delta v)^2 - \frac{1}{4} (\Delta v)^2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{M}_n &= \frac{4}{3} \frac{(1 - \Delta v)^2 M_0 - E_0}{(1 - \Delta v)^2 - \frac{1}{4} (\Delta v)^2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{E}_n &= 0, \end{aligned}$$

where M_n , E_n , \tilde{M}_n and \tilde{E}_n are defined by (2.3.4) and (2.3.5).

Remark 9. For any non zero initial condition that vanishes on the boundary, we have $M_0 > E_0$. Therefore, if Δv is chosen small enough, the assumption $(1 - \Delta v)^2 M_0 - E_0 > 0$ is satisfied.

Proof. From Items (ii) and (iii) of Proposition 2.3.1, we know that, up to a subsequence, the values f_k^n for $k \in X \setminus \mathbb{Z}$ and thus for all $k \in X$ converge, i.e. we can choose $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ increasing such that

$$\forall k \in X \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k^{\varphi(n)} =: f_k^\infty,$$

where the limits f_k^∞ depend on φ . Therefore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{M}_{\varphi(n)} =: \tilde{M}_\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{E}_{\varphi(n)} =: \tilde{E}_\infty,$$

as limits of linear combinations of the f_k^n . Besides, using (2.3.6) and (2.3.1), $f_k^{\varphi(n)+1}$ can be expressed in function of $f_k^{\varphi(n)}$, $\tilde{E}_{\varphi(n)}$ and $\tilde{M}_{\varphi(n)}$. Thus, it converges to a limit $f_k^{\infty,1}$. Let us denote by $\tilde{E}_{\infty,1}$ and $\tilde{M}_{\infty,1}$ the limits of $\tilde{E}_{\varphi(n)+1}$ and $\tilde{M}_{\varphi(n)+1}$ respectively. In the same way, we can define, by induction on $p \in \mathbb{N}$, $f_k^{\infty,p}$, $\tilde{E}_{\infty,p}$ and $\tilde{M}_{\infty,p}$. From (2.3.6), we have, for all $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall k \in X \setminus \mathbb{Z} \quad \frac{f_k^{\infty,p+1} - f_k^{\infty,p}}{\Delta t} = \frac{1}{v_k^2} D_k (v_k^2 \tilde{E}_{\infty,p} D_k f_k^{\infty,p} + 3v_k^3 \tilde{M}_{\infty,p} f_k^{\infty,p}). \quad (2.3.10)$$

From (iv) and (ii) of Theorem 2.3.1 we have

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n =: E_\infty.$$

Then, from (2.3.9) we get

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \tilde{E}_{\infty,p} f_{N-\frac{1}{2}}^{\infty,p} = 0.$$

Assume that, for every $p \in \mathbb{N}$, we have $\tilde{E}_{\infty,p} \neq 0$. Then, for $q \geq 1$ and using (2.3.10) with $p = q - 1$ and $k = N - \frac{1}{2}$, we obtain $f_{N-\frac{3}{2}}^{\infty,q-1} = f_{N-\frac{1}{2}}^{\infty,q-1} = 0$. By finite induction, for $s \leq N - 1$, we deduce that if $q \geq s$

$$f_{N-\frac{1}{2}-s}^{\infty,q-s} = f_{N-\frac{1}{2}-s+1}^{\infty,q-s} = \dots = f_{N-\frac{1}{2}}^{\infty,q-s} = 0.$$

Therefore, for $q \geq 0$, we have $f_k^{\infty,q} = 0$ for all $k \in X$ and then $\tilde{E}_{\infty,q} = 0$, which contradicts our hypothesis. Thus, there exists $p_0 \in \mathbb{N}$ such that $\tilde{E}_{\infty,p_0} = 0$. As

$$0 = \tilde{E}_{\infty,p_0} = 2\pi I(v_k^4 f_k^{\infty,p_0}),$$

we deduce from (ii) that

$$\forall k \in X \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\} \quad f_k^{\infty,p_0} = 0.$$

Consider the smallest p_0 for which $\tilde{E}_{\infty, p_0} = 0$. Suppose that $p_0 \geq 1$, then $f_{N-\frac{3}{2}}^{\infty, p_0} = f_{N-\frac{1}{2}}^{\infty, p_0} = f_{N-\frac{1}{2}}^{\infty, p_0-1} = 0$ and from (2.3.10) $f_{N-\frac{3}{2}}^{\infty, p_0-1} = 0$. A simple finite induction on $s \leq N-1$ gives

$$0 = f_{N-\frac{1}{2}}^{\infty, p_0-1} = f_{N-\frac{3}{2}}^{\infty, p_0-1} = \dots = f_{N-\frac{1}{2}-s}^{\infty, p_0-1} = \dots = f_{\frac{1}{2}}^{\infty, p_0-1} = 0,$$

and thus $\tilde{E}_{\infty, p_0-1} = 0$ which contradicts the definition of p_0 . Finally, $p_0 = 0$ and

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{E}_n &= 0, \\ \forall k \in X \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k^n &= 0, \\ E_\infty &= \frac{\pi}{4} (\Delta v)^5 f_{\frac{1}{2}}^\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n &= \pi (\Delta v)^3 f_{\frac{1}{2}}^\infty =: M_\infty. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{M}_n &= \frac{4\pi}{3} (\Delta v)^3 f_{\frac{1}{2}}^\infty. \end{aligned}$$

To finish the proof, we use the discrete conservation law (v) of Theorem 2.3.1 that gives:

$$(1 - \Delta v)^2 M_\infty - E_\infty = (1 - \Delta v)^2 M_0 - E_0.$$

□

2.3.2 Simulations

On Figures 2.3.1, 2.3.2 and 2.3.3, one observes that the shape of the initial condition has poor influence on the behavior of the solution after a short time. Indeed, rapidly the solution looks like a Maxwellian, which illustrates numerically the self-similar behavior proved in the future work [9].

Table 2.1 shows the different values of the distribution function at $v = \frac{1}{9}$ and illustrates the convergence of the scheme as the grid steps tend to zero. The velocity step is divided by 3 instead of 2, because of the shifted grid chosen to avoid the zero value. The velocity step is taken so that $\frac{1}{9}$ is always a value in the velocity grid and the time step is chosen according to the CFL condition. For this calculation we used the initial condition of Figure 2.3.1.

Since the long time convergence is very slow, we are not able to check numerically that the product $E_f(t) \log t$ converges to the right constant $\frac{3M_\infty R^2}{2}$ which is about 0.75687 for the initial condition considered. Nevertheless, we observed that for relatively large time, the profile of $E_f(t) \log t$ closely follows that of the theoretical lower

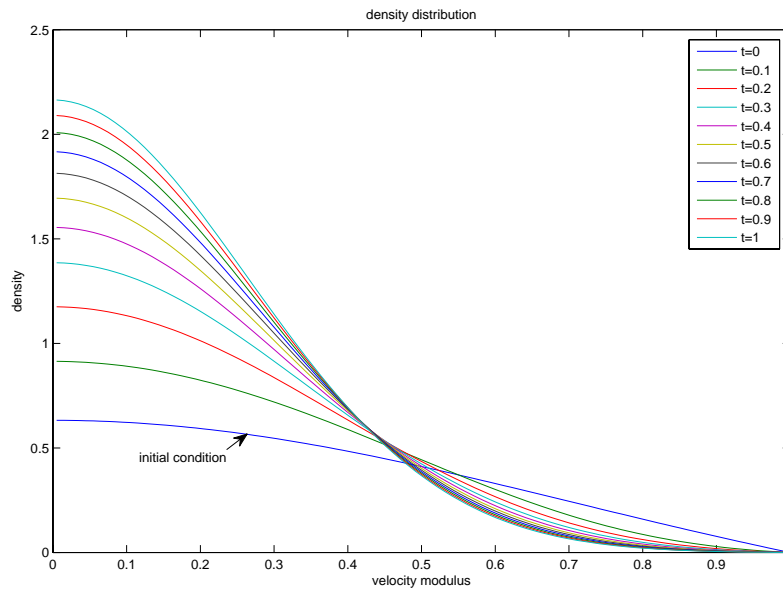


Figure 2.3.1: Density distribution at different times for a shifted Maxwellian initial condition: $f_0(v) = e^{-v^2} - 1/e$

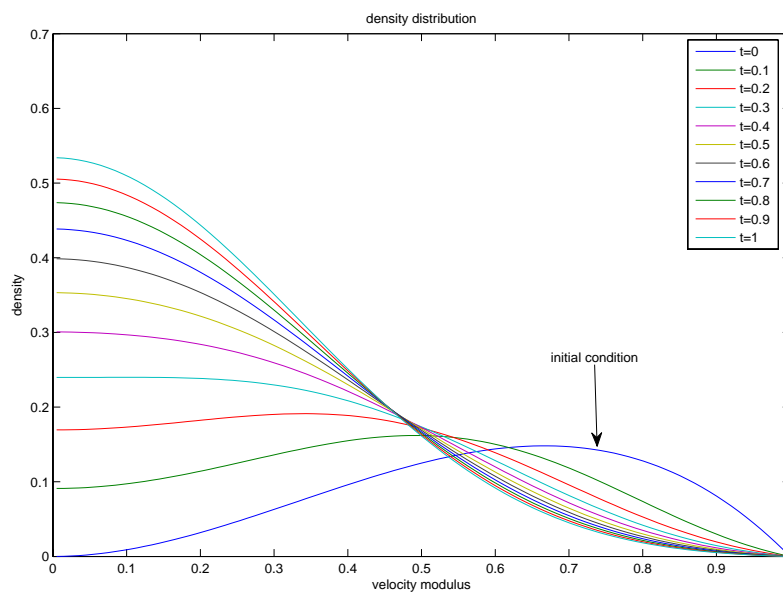


Figure 2.3.2: Density distribution at different times for an off-centered bump initial condition: $f_0(v) = |v|^2 - |v|^3$

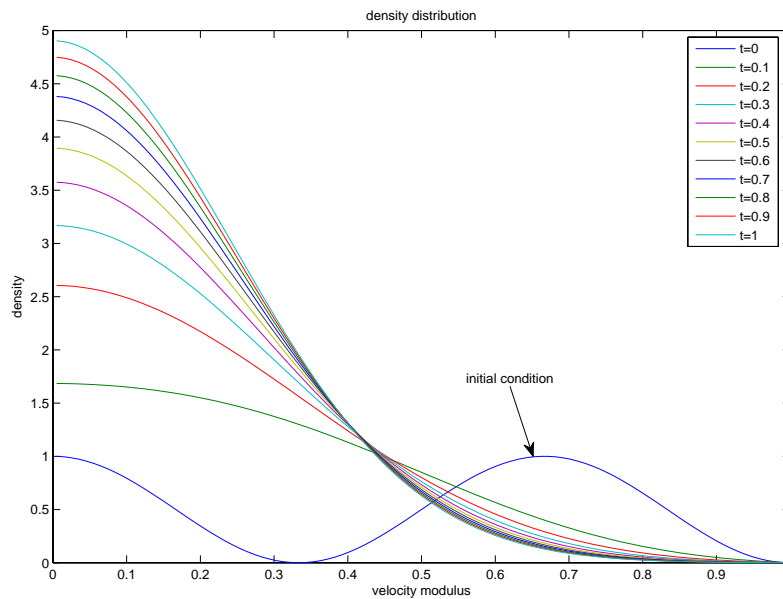


Figure 2.3.3: Density distribution at different times for a double bump initial condition with a zero normal derivative on the boundary: $f_0(v) = \frac{\cos(3\pi|v|)+1}{2}$

Δv	Δt	$f(t, v)$	CPU
$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{729}$	2.49734	0.04s
$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{6561}$	3.11357	0.012s
$\frac{2}{81}$	$\frac{4}{59049}$	2.92593	0.026s
$\frac{2}{243}$	$\frac{4}{531441}$	2.82668	0.144s
$\frac{2}{729}$	$\frac{4}{4782969}$	2.79005	1.451s
$\frac{2}{2187}$	$\frac{4}{43046721}$	2.77747	44.525s

Table 2.1: Test of scheme convergence, at time $t = 4$ for $|v| = \frac{1}{9}$.

bound found in Section 2.2.3:

$$t \mapsto \frac{\left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon\right) \log t}{\log \left(Ct + e^{\frac{1}{E_{f_0}} \left(\frac{3M_\infty R^2}{2} - \varepsilon\right)}\right)}$$

On Figure 2.3.4, we have represented the product $E_f(t) \log(t)$ and the theoretical lower bound. We have chosen $\varepsilon = 0.01$ and determined numerically the constant α

of Lemma 2.2.6 to compute a value of C as the maximum of

$$\frac{8\pi R^5 \alpha e^{R^2 \left(\frac{3M_\infty}{2E_f(t)} - \frac{1}{\beta(t)} \right) - \frac{\varepsilon}{E_f(t)}}}{\beta^{\frac{5}{2}}(t) E_f(t)}$$

for $t \in [0, 100]$. We found $C \simeq 7208.3$.

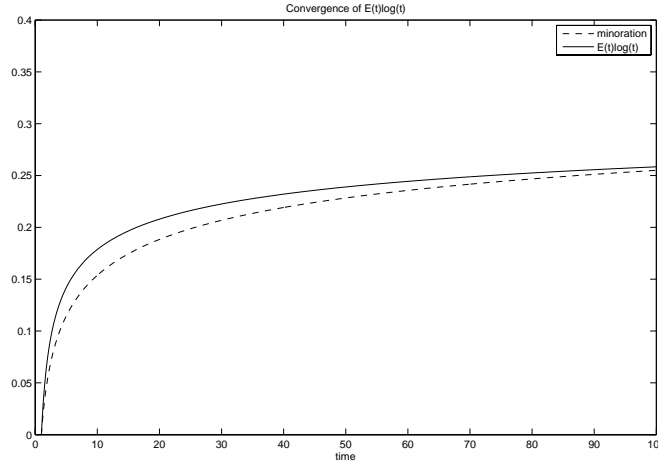


Figure 2.3.4: Evolution of $E_f(t) \log t$

Let us now illustrate numerically that the distribution function converges to the Dirac mass. Figure 2.3.5 shows the numerical solution, when $\Delta v = \frac{2}{7}$ and $\Delta t = \frac{4}{441}$, with the initial condition of Figure 2.3.1, up to time $T = 10^6$. In Table 2.2, we give the calculated values compared with the theoretical limits given by Proposition 2.3.2 for $\Delta v = \frac{2}{7}$ and $\Delta t = \frac{4}{441}$ at time $T = 10^9$.

	numerical value	theoretical limit	relative error
$f_{\frac{1}{2}}^T$	3.397701	3.397888	$5.5 \cdot 10^{-5}$
$f_{\frac{3}{2}}^T$	$3.108070 \cdot 10^{-5}$	0	
$f_{\frac{5}{2}}^T$	$1.421556 \cdot 10^{-10}$	0	
E_T	$5.084596 \cdot 10^{-3}$	$5.081111 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-4}$
\tilde{E}_T	$7.436903 \cdot 10^{-7}$	0	

Table 2.2: Numerical values at time $T = 10^9$ with $\Delta v = \frac{2}{7}$, $\Delta t = \frac{4}{441}$.

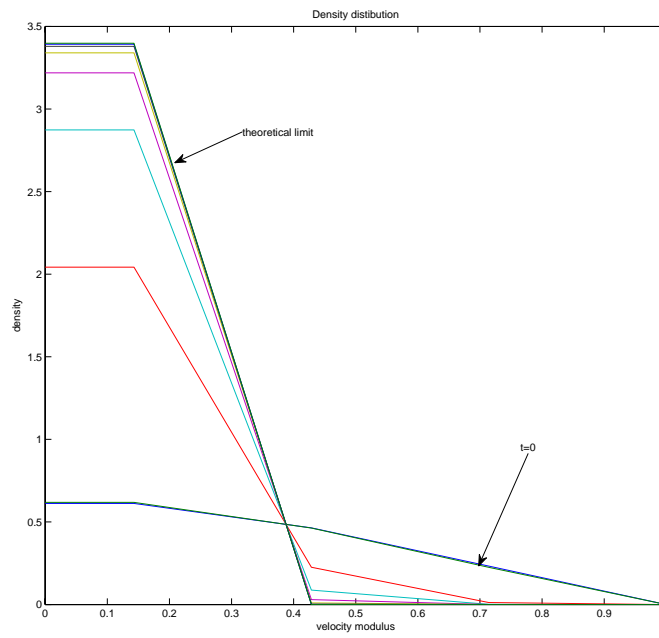


Figure 2.3.5: Density distribution at time $t = 0, 1, 10, 100, \dots, 10^6$ for $f_0(v) = e^{v^2} - \frac{1}{e}$, $\Delta v = \frac{2}{7}$ and $\Delta t = \frac{4}{441}$.

Chapitre 3

Profil asymptotique pour les solutions du modèle avec potentiel Maxwellien et symétrie radiale

3.1 Introduction et rappels

L'équation à laquelle on s'intéresse est la suivante :

$$\partial_t f(t, v) = \nabla_v \cdot (E_f(t) \nabla_v f(t, v) + 3M_f(t) f(t, v) v), \quad (3.1.1)$$

pour $t \in [0, +\infty[$ et $v \in B_R := \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, R)$ où $R > 0$ est fixé et avec :

$$M_f(t) := \int_{B_R} |f(t, v)| dv, \quad E_f(t) := \int_{B_R} |f(t, v)| v^2 dv. \quad (3.1.2)$$

On prend les conditions aux limites :

$$f(0, \cdot) = f_0 \geq 0 \quad (3.1.3)$$

avec f_0 à symétrie sphérique nulle sur ∂B_R , et

$$f(t, v) = 0 \text{ pour } t \in [0, +\infty[\text{ et } |v| = R. \quad (3.1.4)$$

Pour une condition initiale régulière, d'après le Théorème 2.2.1, il y a existence et unicité d'une solution positive régulière qui est alors à symétrie sphérique. Par exemple, pour $f_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}$ en espace, pour un certain $\alpha > 0$, la solution est \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace. Dans la suite, on considère une condition initiale non nulle,

suffisamment régulière pour avoir une solution f classique. En particulier, elle sera au minimum \mathcal{C}^2 . Je rappelle le résultat de l'étude asymptotique des coefficients de masse et d'énergie du chapitre précédent (cf. Théorème 2.2.1, Lemme 2.2.5 et Lemme 2.2.7) :

Lemme 3.1.1. *Soit $R > 0$, f de $[0, +\infty[\times B_R$ dans \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace solution de (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.4). Soient M_f et E_f définis par (3.1.2) et définissons β comme l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \beta' = 4E_f - 6M_f\beta, \\ \beta(0) = \frac{2E_{f_0}}{3M_{f_0}}. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

On pose également

$$M_\infty := M_{f_0} - \frac{E_{f_0}}{R^2}.$$

Alors β est strictement positive et strictement décroissante et on a

$$\begin{aligned} (i) \quad M_f(t) &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} M_\infty + \frac{3M_\infty}{2 \log(t)}, \\ (ii) \quad E_f(t) &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3M_\infty R^2}{2 \log(t)}, \\ (iii) \quad \beta(t) &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R^2}{\log(t)}. \end{aligned}$$

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème

Théorème 3.1.2. *Soit $R > 0$, f de $[0, +\infty[\times B_R$ dans \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace solution de (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.4). Soient M_f et E_f définis par (3.1.2). Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, il existe une constante C_{ε, R, f_0} qui ne dépend que de ε , R et de la condition initiale f_0 telle que*

$$\|f(t, \cdot) - \mathcal{P}(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_{\varepsilon, R, f_0}}{1 + t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}}$$

avec

$$\mathcal{P}(t, v) := \frac{M_f(t)}{(\pi\beta(t))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{\beta(t)}}.$$

La preuve de ce théorème est donnée à la fin du Paragraphe 3.4.

3.2 Changements de variables

J'utilise ici une méthode employée dans [34]. On fait un premier changement de variable pour se ramener à un simple noyau de Fokker-Planck, et on remplace le problème sur un domaine de vitesses fixe par un problème sur un domaine de vitesses variable. On a le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit $R > 0$ et f de $[0, +\infty[\times B_R$ dans \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace solution de (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.4). Soient M_f et E_f définis par (3.1.2) et définissons, pour $t \in [0, +\infty[$*

$$\gamma_0 := \sqrt{\frac{E_{f_0}}{3M_{f_0}}},$$

$$\tau(t) := \frac{1}{2} \log \left(\gamma_0^2 + 2 \int_0^t E_f(s) e^{6 \int_0^s M_f(u) du} ds \right) - \log(\gamma_0),$$

$$\gamma(t) := \left(\gamma_0^2 e^{-6 \int_0^t M_f(s) ds} + 2 \int_0^t E_f(s) e^{6 \int_t^s M_f(u) du} ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, γ est strictement positive, τ est une bijection croissante de $[0, +\infty[$ dans lui-même et on peut définir pour $(t, v) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$

$$F(t, v) := \gamma^3(\tau^{-1}(t)) f(\tau^{-1}(t), \gamma(\tau^{-1}(t))v),$$

$$R(t) := \frac{R}{\gamma(\tau^{-1}(t))},$$

$$\mathcal{D} := \{(t, v) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^3 \mid \forall t \in [0, +\infty[, \quad |v| < R(t)\}, \quad (3.2.1)$$

où la fonction f est prolongée sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ par 0. La fonction F ainsi définie est \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace sur \mathcal{D} et est solution de

$$\begin{cases} \partial_t F(t, v) = \nabla_v \cdot (\nabla_v F(t, v) + v F(t, v)), & t \in [0, +\infty[, v \in B_{R(t)}, \\ F(0, v) = \gamma_0^3 f_0(\gamma_0 v), & v \in B_{\gamma_0^{-1} R} \\ F(t, v) = 0, & t \in [0, +\infty[, v \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R(t)}. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

De plus, la fonction R est strictement croissante, strictement positive et on a l'équivalent suivant :

$$R(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2 \log(t)}. \quad (3.2.3)$$

Démonstration. Un simple calcul permet de voir que $2\gamma^2$ est solution de (3.1.5) et on a alors

$$\beta = 2\gamma^2. \quad (3.2.4)$$

Il est clair alors que γ est strictement positive et strictement décroissante et on a d'après l'équivalent de β redonné dans le Lemme 3.1.1

$$\gamma(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R}{\sqrt{2 \log(t)}}. \quad (3.2.5)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{1}{2} \log \left(\gamma^2(t) e^{6 \int_0^t M_f(s) ds} \right) - \log(\gamma_0), \\ \tau'(t) &= \frac{(2E_f(t) - 6M_f(t)\gamma^2(t) + 6M_f(t)\gamma^2(t))e^{6 \int_0^t M_f(s) ds}}{2\gamma^2(t)e^{6 \int_0^t M_f(s) ds}} \\ &= \frac{E_f(t)}{\gamma^2(t)} > 0, \end{aligned}$$

et il est clair que τ est strictement croissante et que $\tau(0) = 0$. De plus, en utilisant (3.2.5) et la limite de M_f donnée par le Lemme 3.1.1 on a l'équivalent

$$\tau(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 3M_\infty t. \quad (3.2.6)$$

On a donc bien montré que τ est bijective on a

$$\tau^{-1}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{3M_\infty}.$$

On en déduit directement (3.2.3). Par ailleurs on a pour $(t, v) \in [0, +\infty[\times B_R$,

$$f(t, v) := \frac{1}{\gamma^3(t)} F \left(\tau(t), \frac{v}{\gamma(t)} \right),$$

On note :

$$\tilde{v} = \frac{v}{\gamma(t)}.$$

et on calcule

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, v) &= \frac{\tau'(t)}{\gamma^3(t)} \partial_t F(\tau(t), \tilde{v}) - \frac{\gamma'(t)}{\gamma^4(t)} \nabla_{\tilde{v}} \cdot (\tilde{v} F(\tau(t), \tilde{v})) \\ \nabla_v \cdot (E_f(t) \nabla_v f(t, v) + 3M_f(t) f(t, v) v) &= \frac{E_f(t)}{\gamma^5(t)} \Delta_{\tilde{v}} F(\tau(t), \tilde{v}) \\ &\quad + 3 \frac{M_f(t)}{\gamma^3(t)} \nabla_{\tilde{v}} \cdot (\tilde{v} F(\tau(t), \tilde{v})) \end{aligned}$$

et donc :

$$\partial_t F(\tau(t), \tilde{v}) = \nabla_{\tilde{v}} \cdot \left(\frac{E_f(t)}{\gamma^2(t)\tau'(t)} \nabla_{\tilde{v}} F(\tau(t), \tilde{v}) + \frac{3\gamma(t)M_f(t) + \gamma'(t)}{\gamma(t)\tau'(t)} F(t, \tilde{v}) \tilde{v} \right).$$

On a vu que

$$\tau'(t) = \frac{E_f(t)}{\gamma^2(t)},$$

$$\frac{d}{dt}(2\gamma^2(t)) = 4E_f(t) - 6M_f(t)(2\gamma^2(t)),$$

On a donc

$$\frac{E_f(t)}{\gamma^2(t)\tau'(t)} = \frac{3\gamma(t)M_f(t) + \gamma'(t)}{\gamma(t)\tau'(t)} = 1.$$

Pour conclure, il est facile de remarquer que $F(t, v) = 0$ pour $v \geq R(t)$. \square

Ensuite, on fait un deuxième changement de variable classique (cf [2]) pour se ramener à un opérateur autoadjoint. Plus précisément il s'agit de l'opérateur de l'oscillateur harmonique quantique.

Lemme 3.2.2. *Soit F de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ dans \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace sur \mathcal{D} (défini par (3.2.1)), solution de (3.2.2). On pose, pour $(t, v) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$,*

$$u(t, v) = F(t, v)e^{\frac{v^2}{4} - \frac{3}{2}t}.$$

Alors, u est \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace sur \mathcal{D} et solution de

$$\begin{cases} \partial_t u(t, v) = \Delta_v u(t, v) - \frac{v^2}{4} u(t, v), & t \in [0, +\infty[, v \in B_{R(t)}, \\ u(0, v) = \gamma_0^3 f_0(\gamma_0 v) e^{\frac{v^2}{4}}, & v \in B_{\gamma_0^{-1}R}, \\ u(t, v) = 0, & t \in [0, +\infty[, v \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R(t)}, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

où R et γ_0 sont définis dans le Lemme 3.2.1.

Démonstration. Pour $t \in [0, +\infty[$ et $v \in B_{R(t)}$ on a

$$\begin{aligned} \nabla_v \cdot (\nabla_v F(t, v) + vF(t, v)) &= \nabla_v \cdot \left(e^{-\frac{v^2}{2}} \nabla_v \left(e^{\frac{v^2}{2}} F(t, v) \right) \right) \\ &= \nabla_v \cdot \left(e^{-\frac{v^2}{2}} \nabla_v \left(e^{\frac{v^2}{4} + \frac{3}{2}t} u(t, v) \right) \right) \\ &= \nabla_v \cdot \left(e^{-\frac{v^2}{4} + \frac{3}{2}t} \left(\frac{v}{2} u(t, v) + \nabla_v u(t, v) \right) \right) \\ &= \left(\left(\frac{3}{2} - \frac{v^2}{4} \right) u(t, v) + \Delta_v u(t, v) \right) e^{-\frac{v^2}{4} + \frac{3}{2}t}, \end{aligned}$$

et

$$\partial_t F(t, v) = \left(\frac{3}{2} u(t, v) + \partial_t u(t, v) \right) e^{-\frac{v^2}{4} + \frac{3}{2}t}.$$

\square

3.3 Une étude spectrale

On définit l'opérateur L qui agit sur les fonctions $u \in \mathcal{C}^2$ de \mathcal{D} (défini par (3.2.1)) dans \mathbb{R} par

$$Lu(x) = \Delta u(x) - \frac{x^2}{4}u(x). \quad (3.3.1)$$

On a le lemme

Lemme 3.3.1. *Il existe une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ qui diagonalise l'opérateur L qui est donnée pour $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$*

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \mathbf{H}_n(x) e^{-\frac{x^2}{4}} \\ &= H_{n_1}(x_1) H_{n_2}(x_2) H_{n_3}(x_3) e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{4}}, \end{aligned}$$

avec H_n le n ième polynôme de Hermite donné par

$$H_n = \left(n! \sqrt{2\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} P_n,$$

où P_n est défini par

$$\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_1 = X, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = X P_{n+1} - (n+1) P_n. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^3$

$$L\psi_n = - \left(|n| + \frac{3}{2} \right) \psi_n. \quad (3.3.3)$$

Démonstration. Montrons d'abord que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Il est clair, par croissances comparées que ce sont des fonctions de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$. La famille des $(\mathbf{H}_n)_{n \in \mathbb{N}^3}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ à degrés échelonnés au sens où pour tout $n \in \mathbb{N}^3$ le monôme $X_1^{n_1} X_2^{n_2} X_3^{n_3}$ peut-être obtenu comme combinaison linéaire des \mathbf{H}_n . En effet, la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille échelonnée de $\mathbb{R}[X]$ (Il est facile de montrer par récurrence que $\deg(H_n) = n$ à partir de (3.3.2)). Ainsi, il existe $\lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{1,n_1}, \lambda_{2,0}, \dots, \lambda_{2,n_2}, \lambda_{3,0}, \dots, \lambda_{3,n_3} \in \mathbb{R}$ tels que

$$X_1^{n_1} X_2^{n_2} X_3^{n_3} = \prod_{i=1}^3 \left(\sum_{k=0}^{n_i} \lambda_{i,k} H_k(X_i) \right) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^3 \\ k \leq n}} \left(\prod_{i=1}^3 \lambda_{i,k_i} \right) \mathbf{H}_k.$$

On en déduit que la famille des ψ_n est totale car si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ est telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^3, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \psi_n(x) f(x) \, dx = 0,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^3, \quad \int_{\mathbb{R}^3} x^n e^{-\frac{x^2}{4}} f(x) \, dx = 0.$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{i\xi \cdot x} e^{-\frac{x^2}{4}} \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^3 \\ |k|=n}} \frac{(i)^n (\xi)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) x^k e^{-\frac{x^2}{4}} \, dx = 0.$$

Ainsi, la transformée de Fourier de $x \mapsto f(x) e^{-\frac{x^2}{4}}$ est nulle ce qui signifie que f est nulle. Pour montrer l'orthogonalité de la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^3}$, il suffit de montrer l'orthogonalité de la famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto H_n(x) e^{-\frac{x^2}{4}}. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

En effet, on a, pour $m, n \in \mathbb{N}^3$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi_n(x) \psi_m(x) \, dx = \prod_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}} g_{n_i}(x) g_{m_i}(x) \, dx = \delta_{mn},$$

si la famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale. Notons D et \hat{D} les opérateurs qui à f fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} associent

$$Df(x) = f'(x) + \frac{x}{2} f(x),$$

$$\hat{D}f(x) = -f'(x) + \frac{x}{2} f(x).$$

On notera aussi $w(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Il est facile de voir que $Dw = 0$ et que, si f est une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} alors

$$\frac{1}{w} D(wf) = \frac{1}{w} f' w = f',$$

$$\hat{D}w(x) = xw(x),$$

$$\frac{1}{w} \hat{D}(wf)(x) = -f'(x) + xf(x),$$

$$D\hat{D}f(x) = -f''(x) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{x}{2}f'(x) - \frac{x}{2}f'(x) + \frac{x^2}{4}f(x) = -f''(x) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\right)f(x),$$

$$\hat{D}Df(x) = -f''(x) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{x}{2}f'(x) + \frac{x}{2}f'(x) + \frac{x^2}{4}f(x) = -f''(x) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)f(x),$$

$$D\hat{D} - \hat{D}D = \text{Id}.$$

Les propriétés suivantes sont alors simples à montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D\hat{D}^n = \hat{D}^n D + n\hat{D}^{n-1},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D^n \hat{D}^n w = n!w,$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad m > n \Rightarrow D^m \hat{D}^n w = 0.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$P_n = \frac{1}{w} \hat{D}^n w.$$

On a

$$P_0 = 1 = \frac{1}{w}w, \quad P_1 = X = \frac{1}{w}\hat{D}w,$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si on suppose que la propriété est vraie pour P_n et P_{n+1} alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \hat{D}^{n+2} w &= \frac{1}{w} \hat{D}(w P_{n+1}) \\ &= -P'_{n+1} + X P_{n+1} \\ &= -\frac{1}{w} D(w P_{n+1}) + X P_{n+1} \\ &= -\frac{1}{w} D \hat{D}^{n+1} w + X P_{n+1} \\ &= -(n+1) \frac{1}{w} \hat{D}^n w + X P_{n+1} \\ &= X P_{n+1} - (n+1) P_n \\ &= P_{n+2}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que \hat{D} est l'adjoint de D , on peut alors calculer, pour $m, n \in \mathbb{N}$,

avec $m \geq n$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g_n(x) g_m(x) dx &= \frac{1}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} P_n(x) P_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \\
&= \frac{1}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\hat{D}^n w)(x) (\hat{D}^m w)(x) dx \\
&= \frac{1}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (D^m \hat{D}^n w(x)) w(x) dx \\
&= \delta_{mn} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \delta_{mn}.
\end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration de ce lemme, il suffit de vérifier (3.3.3). On calcule, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left(\partial_x^2 - \frac{x^2}{4} \right) g_n(x) &= \left(-D\hat{D} + \frac{1}{2} \right) g_n(x) \\
&= -(n! \sqrt{2\pi})^{-\frac{1}{2}} D\hat{D}^{n+1} w(x) + \frac{1}{2} g_n(x) \\
&= -(n+1) g_n(x) + \frac{1}{2} g_n(x) \\
&= -\left(n + \frac{1}{2} \right) g_n(x),
\end{aligned}$$

$$L\psi_n(x) = \sum_{i=1}^3 \left(\partial_{x_i}^2 - \frac{x_i^2}{4} \right) \prod_{j=1}^3 g_{n_j}(x_j) = -\left(|n| + \frac{3}{2} \right) \psi_n(x).$$

□

Pour la partie suivante, on va devoir estimer les ψ_n en norme infinie. On note $\mathbf{1} := (1, 1, 1)$ et pour $k \in \mathbb{N}^3$ tel que $k_1 k_2 k_3 \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}^3$, on note $k^\alpha := k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} k_3^{\alpha_3}$. On a le lemme

Lemme 3.3.2. *Soit $R \geq 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^3, \quad \sup_{[-R, R]} |\psi_n| \leq \frac{CR^{\frac{15}{2}}}{\prod_{i=1}^3 (n_i^{\frac{1}{4}} + 1)}.$$

Démonstration. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := P_{2n}(0), \quad a'_n := P'_{2n}(0),$$

$$b_n := P_{2n+1}(0), \quad b'_n := P'_{2n+1}(0),$$

où les P_n sont définis par (3.3.2). On a

$$a_0 = 1, \quad a'_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b'_0 = 1,$$

$$a_{n+1} = -(2n+1)a_n,$$

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} & \text{si } n \geq 1, \\ 1 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

$$b_{n+1} = -(2n+2)b_n,$$

$$b_n = 0,$$

$$a'_{n+1} = b_n - (2n+1)a'_n = -(2n+1)a'_n,$$

$$a'_n = 0,$$

$$b'_{n+1} = a_{n+1} - (2n+2)b'_n,$$

$$b'_n = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^n n!} = -a_{n+1}.$$

En définissant, comme dans la preuve du Lemme 3.3.1 g_n par (3.3.4), on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$g_{2n}(0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(2n)!}\sqrt{2\pi}} (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} & \text{si } n \geq 1, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{4}} & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

$$g_{2n+1}(0) = 0,$$

$$g'_{2n}(0) = 0,$$

$$g'_{2n+1}(0) = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}\sqrt{2\pi}} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

En utilisant la formule de Stirling on a

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)!}{\sqrt{(2n)!}2^{n-1}(n-1)!} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n \sqrt{2\pi} (2n-1)^{2n-\frac{1}{2}} e^{n-1}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} (2n)^{n+\frac{1}{4}} e^{2n-1} 2^{n-1} \sqrt{2\pi} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\pi n)^{-\frac{1}{4}} \frac{(2n-1)^{2n-1}}{(2n)^n (2n-2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(2k-1)^{2k-1}}{(2k)^k(2k-2)^{k-1}} &= \exp((2k-1)\log(2k-1) - k\log(2k) - (k-1)\log(2k-2)) \\
&= \exp\left((2k-1)\log\left(1 - \frac{1}{2k}\right) - (k-1)\log\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) \\
&\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{(2n-1)!}{\sqrt{(2n)!}2^{n-1}(n-1)!} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\pi n)^{-\frac{1}{4}}, \\
g_{2n}(0) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\frac{1}{4}}}, \\
g'_{2n+1}(0) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-1)^n (2n)^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

De plus g_n est solution de l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$g_n''(x) - \frac{x^2}{4}g_n(x) + \left(n + \frac{1}{2}\right)g_n(x) = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= g_n(0) \cos\left(\sqrt{n + \frac{1}{2}}x\right) + \frac{g'_n(0)}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \sin\left(\sqrt{n + \frac{1}{2}}x\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \int_0^x \frac{y^2}{4} g_n(y) \sin\left(\sqrt{n + \frac{1}{2}}(x-y)\right) dy,
\end{aligned}$$

de sorte que par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en utilisant le fait que $\|g_n\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} = 1$,

$$\begin{aligned}
|g_n(x)| &\leq |g_n(0)| + \frac{|g'_n(0)|}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{5}}, \\
\sup_{[-R,R]} |g_n| &\leq R^{\frac{5}{2}} \left(|g_n(0)| + \frac{|g'_n(0)|}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \frac{1}{4\sqrt{5}} \right), \\
|g_n(0)| + \frac{|g'_n(0)|}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2n)^{\frac{1}{4}}},
\end{aligned}$$

de sorte que la suite de terme général

$$\frac{n^{\frac{1}{4}} + 1}{R^{\frac{5}{2}}} \sup_{[-R,R]} |g_n|,$$

est bornée par une certaine constante universelle $c > 0$. On a donc montré le lemme avec $C = c^3$. \square

3.4 Profil asymptotique

On trouve d'abord un profil asymptotique pour le problème (3.2.7) :

Lemme 3.4.1. *On considère u de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ dans \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace sur \mathcal{D} (défini par (3.2.1)), solution de (3.2.7). On pose, pour $n \in \mathbb{N}^3$ et $t \in [0, +\infty[$,*

$$c_n(t) := \int_{\mathbb{R}^3} u(t, v) \psi_n(v) dv,$$

où les ψ_n sont définis au Lemme 3.3.1. Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, il existe une constante C_{ε, R, u_0} qui ne dépend que de ε , de la fonction R et de la condition initiale $u(0, \cdot)$ telle que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \|u(t, \cdot) - c_0(t) \psi_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\varepsilon, R, u_0} \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{1 + t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}.$$

Démonstration. D'après l'équation vérifiée par u et en utilisant l'opérateur L défini en (3.3.1) on a

$$\begin{aligned} c'_n(t) &= \int_{B_{R(t)}} Lu(t, v) \psi_n(v) dv, \\ &= \int_{\partial B_{R(t)}} \partial_\nu u(t, v) \psi_n(v) d\sigma(v) - \left(|n| + \frac{3}{2} \right) c_n(t), \end{aligned}$$

avec ∂_ν la dérivée selon la normale sortante et $d\sigma$ la mesure surfacique sur $\partial B_R(t)$. On a donc

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-(|n| + \frac{3}{2})t} + \int_0^t \int_{\partial B_{R(s)}} \partial_\nu u(s, v) \psi_n(v) d\sigma(v) e^{(s-t)(|n| + \frac{3}{2})} ds.$$

Prenons $T > 0$, Il est facile de voir que, pour une constante $\alpha > 0$ bien choisie,

$$\mathcal{M} : (t, v) \mapsto \begin{cases} \alpha e^{-\frac{3}{2}t} \left(e^{-\frac{v^2}{4}} - e^{-\frac{R^2(T)}{2}} e^{\frac{v^2}{4}} \right) & \text{si } t \in [0, T], v \in B_{R(t)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une sur-solution sur $[0, T]$ de l'équation (3.2.7), au sens où

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{M}(t, v) - L\mathcal{M}(t, v) \geq 0, & t \in [0, T], v \in B_{R(t)}, \\ \mathcal{M}(0, v) \geq u(0, v), & v \in B_{R(0)}. \end{cases}$$

En effet

$$\partial_t \mathcal{M}(t, v) - L\mathcal{M}(t, v) = 3\alpha e^{-\frac{3}{2}t} e^{-\frac{R^2(T)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4}} \geq 0.$$

De sorte que (puisque la fonction nulle est clairement sous-solution)

$$\forall t \in [0, T], \forall v \in B_{R(t)}, \quad 0 \leq u(t, v) \leq \mathcal{M}(t, v),$$

et en particulier, pour $v \in \partial B_{R(T)}$, comme $\mathcal{M}(T, v)$ est nulle sur $\partial B_{R(T)}$,

$$|\partial_\nu u(T, v)| \leq \alpha R(T) e^{-\left(\frac{R^2(T)}{4} + \frac{3}{2}T\right)}.$$

On a donc, en utilisant le Lemme 3.3.2

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\partial B_{R(s)}} \partial_\nu u(s, v) \psi_n(v) \, d\sigma(v) e^{(s-t)(|n| + \frac{3}{2})} \, ds \right| \\ \leq \frac{C e^{-\frac{3}{2}t}}{\prod_{i=1}^3 (n_i^{\frac{1}{4}} + 1)} \int_0^t R^{\frac{21}{2}}(s) e^{-\frac{R^2(s)}{4}} e^{(s-t)|n|} \, ds. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot) - c_0(t) \psi_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^3 \\ n \neq 0}} c_n^2(t) \\ &\leq 2 \|u(0, \cdot) - c_0(0) \psi_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 e^{-5t} \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^3 \\ n \neq 0}} \frac{C^2 e^{-3t}}{\prod_{i=1}^3 (n_i^{\frac{1}{2}} + 1)} \left(\int_0^t R^{\frac{21}{2}}(s) e^{-\frac{R^2(s)}{4}} e^{(s-t)|n|} \, ds \right)^2. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t R^{\frac{21}{2}}(s) e^{-\frac{R^2(s)}{4}} e^{(s-t)|n|} \, ds \right)^2 \\ \leq \left(\int_0^t R^{\frac{147}{2}}(s) e^{-\frac{7R^2(s)}{4}} e^{\frac{7}{2}(s-t)|n|} \, ds \right)^{\frac{2}{7}} \left(\int_0^t e^{\frac{7}{12}(s-t)|n|} \, ds \right)^{\frac{12}{7}} \\ \leq \left(\frac{12}{7|n|} \right)^{\frac{12}{7}} \left(\int_0^t R^{\frac{147}{2}}(s) e^{-\frac{7R^2(s)}{4}} e^{\frac{7}{2}(s-t)} \, ds \right)^{\frac{2}{7}}. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

On a,

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^3 \\ n \neq 0}} \frac{1}{\prod_{i=1}^3 (n_i^{\frac{1}{2}} + 1)} \frac{1}{|n|^{\frac{12}{7}}} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^{\frac{15}{14}}} \right)^3 < +\infty. \tag{3.4.3}$$

Soit $0 < \varepsilon \leq \frac{7}{2}$. D'après (3.2.3) il existe une constante K_ε qui ne dépend que de la fonction R et de ε telle que

$$R^{\frac{147}{2}}(s)e^{-\frac{7R^2(s)}{4}}e^{\frac{7}{2}s} \leq K_\varepsilon \frac{e^{\frac{7}{2}s}}{1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon}}, \quad (3.4.4)$$

Par ailleurs il est clair que

$$\int_0^t \frac{e^{\frac{7}{2}s}}{1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon}} ds \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{7}{2}t}}{7(1 + t^{\frac{7}{2}-\varepsilon})}. \quad (3.4.5)$$

En effet, puisque

$$\int_0^t \frac{e^{\frac{7}{2}s}}{1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon}} ds = \left[\frac{e^{\frac{7}{2}s}}{7(1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon})} \right]_0^t + \int_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{7} \right) \frac{s^{\frac{5}{2}-\varepsilon} e^{\frac{7}{2}s}}{(1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon})^2} ds,$$

et

$$\frac{e^{\frac{7}{2}s}}{1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon}} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{7}{2}s}}{1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{7} \right) \frac{s^{\frac{5}{2}-\varepsilon} e^{\frac{7}{2}s}}{(1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon})^2},$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{e^{\frac{7}{2}s}}{1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon}} ds &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^t \left(\frac{e^{\frac{7}{2}s}}{1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{7} \right) \frac{s^{\frac{5}{2}-\varepsilon} e^{\frac{7}{2}s}}{(1 + s^{\frac{7}{2}-\varepsilon})^2} \right) ds \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{7}{2}t}}{7(1 + t^{\frac{7}{2}-\varepsilon})}. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3), (3.4.4) et (3.4.5) on a le résultat. \square

On en déduit immédiatement le profil asymptotique de la solution de (3.2.2). Pour la suite on définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ qui sont telles que $v \mapsto f(v)e^{\frac{v^2}{2}} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ par

$$(f|g)_{\mathbb{L}_w^2(\mathbb{R}^3)} := \int_{\mathbb{R}^3} f(v)g(v)e^{\frac{v^2}{2}} dv, \quad (3.4.6)$$

et on notera $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_w^2(\mathbb{R}^3)}$ la norme associée. On notera également

$$\varphi_0(v) := \psi_0(v)e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{v^2}{2}}. \quad (3.4.7)$$

Lemme 3.4.2. *On considère F de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ dans \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace sur \mathcal{D} (défini par (3.2.1)) solution de (3.2.2). Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, il existe une constante C_{ε, R, F_0} qui ne dépend que de ε , de la fonction R et de la condition initiale $F(0, \cdot)$ telle que*

$$\left\| F(t, v) - \frac{M_F(t)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \varphi_0 \right\|_{\mathbb{L}_w^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_{\varepsilon, R, F_0}}{1 + t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}},$$

avec M_F défini par (3.1.2), $\mathbb{L}_w^2(\mathbb{R}^3)$ défini par (3.4.6) et φ_0 définie par (3.4.7).

Démonstration. On déduit directement du Lemme 3.4.1 le fait que

$$\left\| F(t, v) - e^{\frac{3}{2}t} c_0(t) \varphi_0 \right\|_{\mathbb{L}_w^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{c}{1 + t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}},$$

pour une certaine constante $c > 0$ qui ne dépend que de ε , de la fonction R et de $F(0, \cdot)$. On a alors

$$\begin{aligned} \left| M_F(t) - (2\pi)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}t} c_0(t) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(F(t, v) - e^{\frac{3}{2}t} c_0(t) \varphi_0(v) \right) dv \right| \\ &\leq \left\| F(t, \cdot) - e^{\frac{3}{2}t} c_0(t) \varphi_0 \right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{v^2}{2}} dv} \left\| F(t, \cdot) - e^{\frac{3}{2}t} c_0(t) \varphi_0 \right\|_{\mathbb{L}_w^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \frac{c(2\pi)^{\frac{3}{4}}}{1 + t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}}. \end{aligned}$$

Dès lors

$$\left\| \frac{M_F(t)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \varphi_0 - e^{\frac{3}{2}t} c_0(t) \varphi_0 \right\|_{\mathbb{L}_w^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{c(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{1 + t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}},$$

et on en déduit le lemme. \square

On peut maintenant démontrer le Théorème 3.1.2 :

Démonstration du Théorème 3.1.2. On déduit du Lemme 3.4.2 que

$$\left\| F(t, v) - \frac{M_F(t)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \varphi_0 \right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{v^2}{2}} dv} \left\| F(t, v) - \frac{M_F(t)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \varphi_0 \right\|_{\mathbb{L}_w^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_{\varepsilon, R, f_0}}{1 + t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}},$$

et il est facile de voir, en utilisant (3.2.4) que

$$\left\| F(t, \cdot) - \frac{M_F(t)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \varphi_0 \right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)} = \|f(\tau^{-1}(t), \cdot) - \mathcal{P}(\tau^{-1}(t), \cdot)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)}.$$

On conclut en utilisant (3.2.6). □

3.5 Validation numérique

On utilise le schéma numérique présenté dans le chapitre précédent (paragraphe 2.3.1). La fonction beta est simplement calculée à chaque itération en posant

$$\beta_0 = \frac{2E_0}{3M_0},$$

$$\beta_{n+1} := \beta_n + \Delta t(4E_n - 6M_n\beta_n).$$

On peut alors calculer le profil en posant, pour $k \in X \setminus \mathbb{Z}$

$$p_k^n := \frac{M_n}{(\pi\beta_n)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v_k^2}{\beta_n}}.$$

Pour comparer le profil et la solution on considère l'erreur en norme \mathbb{L}^1 calculée par une méthode des rectangles. Puisque le profil n'est pas à support dans B_1 on calcule l'erreur sur B_2 , au delà la queue de la maxwellienne a une aire suffisamment petite. On a représenté sur la Figure 3.5.1 cette erreur en fonction du temps pour une condition initiale de type Maxwellienne. Les temps de calcul pour chaque valeur de pas d'espace Δv sont donnés dans la Table 3.1. Dans la Table 3.1 on a reporté la valeur de l'erreur au temps $T = 10$. Enfin dans la Figure 3.5.2 on représente l'erreur en fonction du temps en échelle logarithmique, l'ordre de convergence est environ égal à 1,7. Les mêmes tests ont été effectués sur les conditions initiales $f_0(v) = v^2 - |v|^3$ et $f_0(v) = \frac{\cos(3\pi|v|)+1}{2}$ et donnent des résultats similaires.

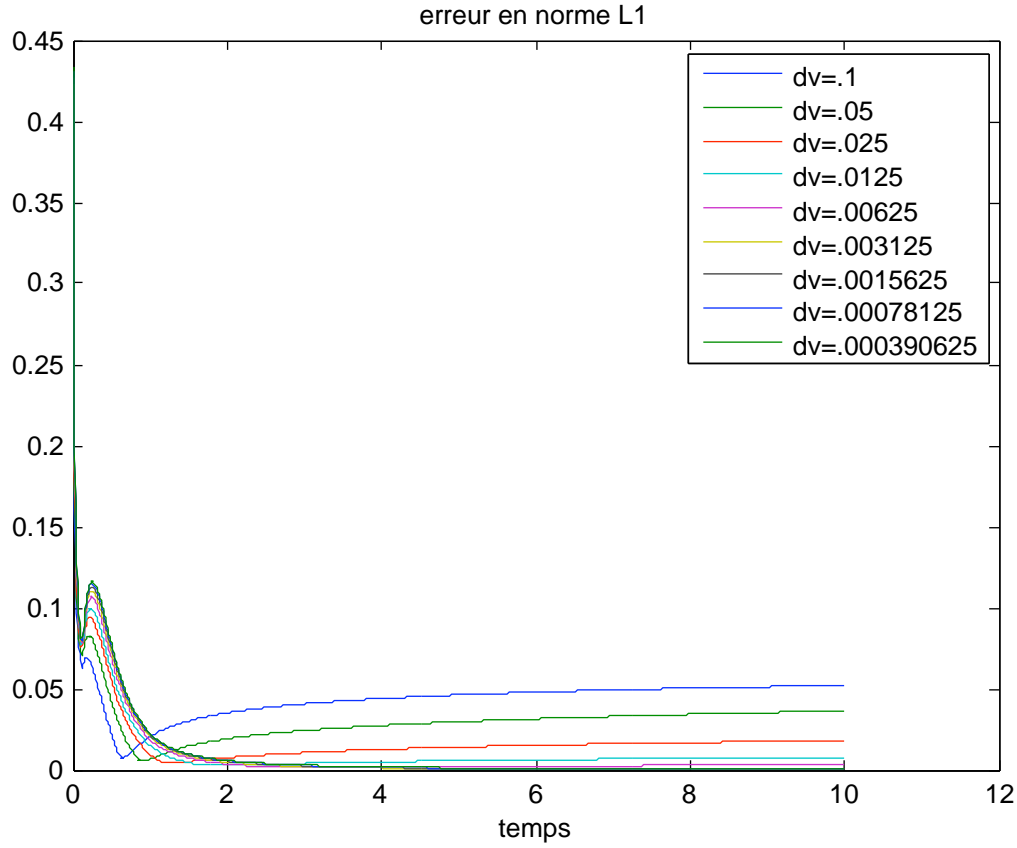


FIGURE 3.5.1 – Erreur en norme \mathbb{L}^1 en fonction du temps, pour la condition initiale $f_0(v) = e^{-v^2} - \frac{1}{e}$ avec $\Delta v = 0,00625$.

Δv	erreur	temps de calcul
0,1	0,0298	0,165s
0,05	0,0197	0,241s
0,025	0,00951	0,625s
0,0125	0,00385	2,413s
0,00625	0,00149	14,317s
0,003125	0,000683	1m45,419s
0,00156125	0,000520	13m21,307s
0,000780125	0,000522	1h45m49,558s
0,000390625	0,000538	14h0m45,793s

TABLE 3.1 – Erreur en norme \mathbb{L}^1 au temps $T = 10$ pour la condition initiale $f_0(v) = e^{-\frac{v^2}{2}} - \frac{1}{e}$ et pour diverses valeurs de Δv .

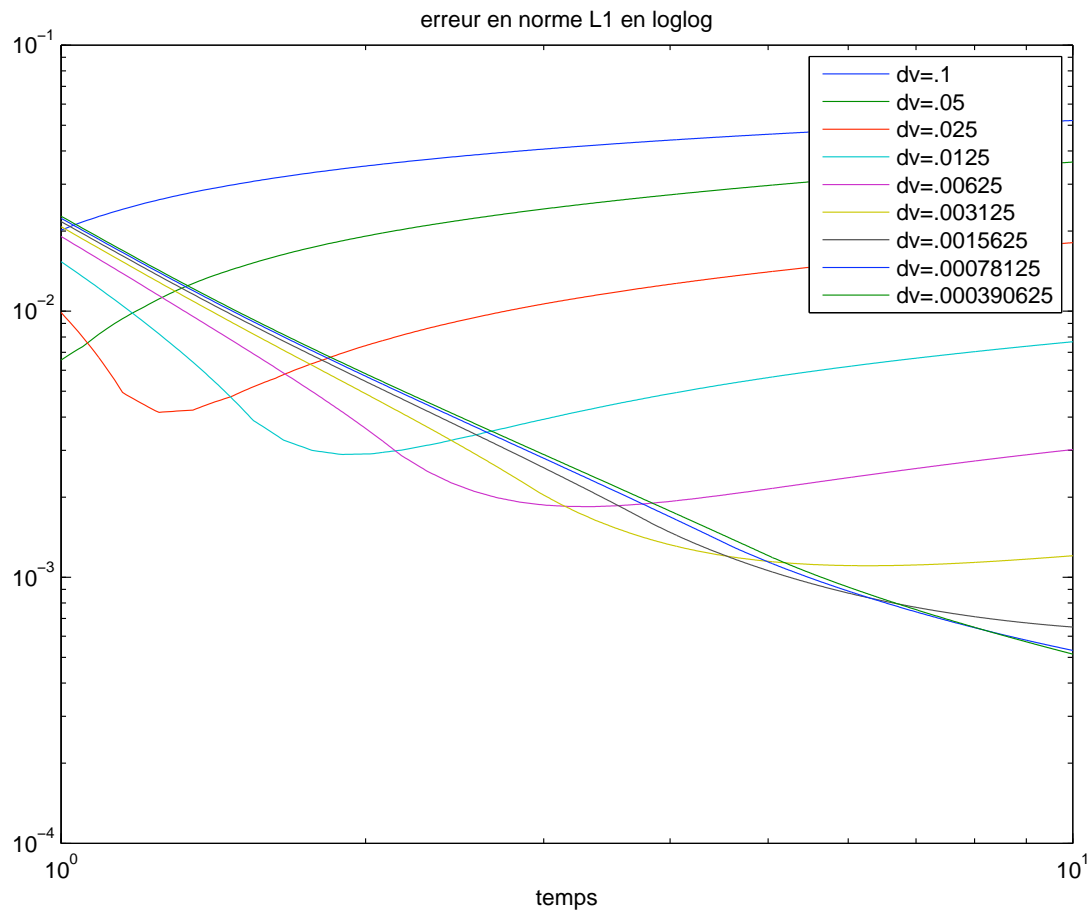


FIGURE 3.5.2 – Erreur en norme \mathbb{L}^1 en fonction du temps en échelle logarithmique, pour la condition initiale $f_0 = e^{-v^2} - \frac{1}{e}$ avec $\Delta v = 0,00625$.

Chapitre 4

Le modèle de Landau général, existence et simulations numériques pour le cas des potentiels durs et d'un domaine de vitesses variable

Le texte de ce chapitre constitue un article soumis pour publication.

4.1 Introduction

4.1.1 The model

A relevant kinetic model for gravitational systems including evaporation phenomena is the following Vlasov-Landau-Poisson system, see [6, 16, 27, 36]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x \phi(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = Q_L(f, f)(t, x, v) \\ \Delta_x \phi(t, x) = \int f(t, x, v) dv, \quad \phi(t, x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \\ f(0, x, v) = f_0(x, v) \\ f(t, x, v) \geq 0 \\ f(t, x, v) = 0 \text{ if } e := \frac{|v|^2}{2} + \phi(x, t) \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

The solution $f(t, x, v)$ of the system is the distribution function of particles. It evolves according to a Vlasov equation in which ϕ is the gravitational potential

created by the distribution of particles. The right-hand side is the Landau collision operator

$$Q_L(f, g)(t, x, v) := \nabla_v \cdot \int \mathcal{A}(v - v_*) (g(t, x, v_*) \nabla_v f(t, x, v) - f(t, x, v) \nabla_{v_*} g(t, x, v_*)) dv_*, \quad (4.1.2)$$

where $\mathcal{A}(z) := |z|^{\gamma+2} \Pi(z)$, and

$$\Pi(z) := \text{Id} - \frac{z \otimes z}{|z|^2}$$

is the orthogonal projection on $(\mathbb{R}z)^\perp$. The parameter γ may take different values in $[-3, 1[$ depending on the particle interaction law. For power-law interactions in $\frac{1}{r^s}$ we have $\gamma := \frac{s-5}{s-1}$, and the following classification is made:

- For Coulombian (plasmas) and Newtonian (stellar systems) interactions, $s = 2$ and $\gamma = -3$.
- Potentials for $0 \leq \gamma < 1$ ($s \geq 5$) are called hard potentials.
- Potentials for $-3 < \gamma < 0$ ($2 < s < 5$) are called soft potentials.

The last condition in (4.1.1) is the evaporation condition. It says that, once a particle has reached the escape velocity, i.e. when its kinetic energy becomes sufficiently large to pass the potential barrier, this particle leaves the system.

To simplify the model, we assume that the distribution is homogeneous in space, i.e. f is constant in the x variable. In this case, the Vlasov term is reduced to the time derivative of f . This is an unphysical assumption because particles should not evaporate, since the system occupies the whole space. The evaporation condition is replaced by a time-dependent velocity threshold. With these simplifications (4.1.1) becomes

$$\partial_t f(t, v) = Q_L(f, f)(t, v), \quad (4.1.3a)$$

$$f(t, v) = 0 \text{ if } |v| \geq R(t), \quad (4.1.3b)$$

$$f(0, v) = f_0, \quad (4.1.3c)$$

$$f \geq 0, \quad (4.1.3d)$$

with Q_L defined by formula (4.1.2) in which the variable x is omitted. As explained in [10], the velocity threshold R can be chosen according to the Virial theorem. It is then defined by the formula

$$R(t) := \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{\frac{E_f(t)}{M_f(t)}}, \quad (4.1.4)$$

where M_f and E_f denotes the mass and energy of f :

$$M_f(t) := \int f(t, v) dv, \quad E_f(t) := \int f(t, v) v^2 dv. \quad (4.1.5)$$

In this paper, to simplify, we assume that R is a given positive regular function of time, independent of f . However, we will use (4.1.4) in the numerical tests.

The spatially homogeneous Landau and Landau-Fermi-Dirac equation has already been studied (see [21, 22, 38, 4] and references therein) when the velocity domain is the whole space \mathbb{R}^3 . The spatially homogeneous Landau equation on a time-independent bounded velocity domain has been studied in [10] for the Maxwellian potential ($\gamma = 0$) and spherically symmetric initial conditions.

4.1.2 Notations and definitions

To help the reader we have listed here the functional spaces used in this paper and some notations. In this paragraph, I denotes an interval of $[0, +\infty[$ which contains 0. For convenience we shall use the abbreviated notation

$$Q_L(f, g)(t, v) = \nabla \cdot \int \mathcal{A}(v - v_*) (g_* \nabla f - f \nabla g_*) dv_*,$$

in which f stands for $f(t, v)$ and g_* for $g(t, v_*)$.

Let $k \in \mathbb{N}$ and $\alpha > 0$. The function R used in (4.1.3b) will always be a function from I to \mathbb{R}_+^* which is $\mathcal{C}^{k, \alpha}$ with $k \geq 1$. If $I = [0, T]$ we define

$$\overline{R}_T := \sup_{[0, T]} R, \quad \underline{R}_T := \inf_{[0, T]} R, \quad \Gamma_T := \sup_{[0, T]} |R'|. \quad (4.1.6)$$

Let $r > 0$, we denote by B_r the open ball of \mathbb{R}^3 of radius r centered at 0.

We use appropriate Hölder functions space for parabolic equations (see [23]). Let $\ell \in \mathbb{R}_+$, and Ω be an open set of \mathbb{R}^3 . The space $\mathcal{B}^\ell(\Omega)$ is the set of continuous functions $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ that vanish on $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ and that are $[\ell]$ (where $[\ell]$ is the integer part of ℓ) times differentiable on Ω and whose derivatives of order $[\ell]$ are

- continuous functions on $\overline{\Omega}$ if ℓ is an integer.
- $\ell - [\ell]$ -Hölder on $\overline{\Omega}$ otherwise.

Let D be an open set of $I \times \mathbb{R}^3$. The space $\mathcal{B}^{\frac{\ell}{2}, \ell}(D)$ is the set of continuous functions $f : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ that vanish on $(I \times \mathbb{R}^3) \setminus D$ and whose partial derivatives

$\partial_t^r \partial_x^\alpha f$ are well-defined and continuous on D for $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $2r + |\alpha| \leq [\ell]$ and, if ℓ is not an integer, the derivatives $\partial_t^r \partial_x^\alpha f$ with $2r + |\alpha| = [\ell]$ are $\ell - [\ell]$ -Hölder on \overline{D} .

We also denote:

$$D_I := \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}^3 \mid |x| < R(t)\}.$$

Now, we define a classical solution to the problem (4.1.3) on I as a function $f \in \mathcal{B}^{\ell+1, \ell+2}(D_I)$ that satisfies (4.1.3a), (4.1.3d) for any $(t, v) \in D_I$, (4.1.3b) and (4.1.3c) for an initial condition $f_0 \in \mathcal{B}^{\ell+2}(B_{R(0)})$.

We shall also consider a space for weak solutions. Let $T > 0$, the space X_T is the set of functions belonging to

$$\mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^3) \cap \mathbb{L}^2([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap H^1(]0, T[, H^{-1}(B_R))$$

whose support is contained in $D_{[0, T]}$. We endow X_T with the norm

$$\|f\|_{X_T} := \|f\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)} + \|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)} + \|\partial_t f\|_{\mathbb{L}^2([0, T], H^{-1}(B_R))}. \quad (4.1.7)$$

A weak solution to the problem (4.1.3) is a function f of X_T satisfying (4.1.3a) for a.e. t in $H^{-1}(B_{R(t)})$, such that its trace on $\{(t, v) \mid t \in [0, T], v \in \partial B_{R(t)}\}$ is zero, (4.1.3c) is verified in $\mathbb{L}^2(B_{R(0)})$ and (4.1.3d) holds pointwise. In such case, we can take $f_0 \in \mathbb{L}^2(B_{R(0)})$.

4.1.3 Outline of the paper

Section 4.2 is devoted to the study of the Cauchy problem. In the case of hard potential, we prove that there exists a unique regular solution to (4.1.3) on an interval $[0, T^*[$ with either $T^* = +\infty$ or M_f tends to 0 as time tends to T^* , see Theorem 4.2.1 for a more precise statement. There are two crucial ingredients to prove the well-posedness of this problem.

First, we easily have an \mathbb{L}^1 -estimate because the mass is non increasing (see Lemma 4.2.2) but we need to prove the equi-integrability of the solution at each time to prove the ellipticity of the Landau operator. In [21] an entropy estimate is used: the Boltzmann entropy

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \log f(t, v) \, dv$$

is non increasing in the case of unbounded velocity domains. As it was noticed in [10], on a bounded velocity domain, this estimate is no longer available. In this paper, we will only deal with the case of hard potentials ($0 \leq \gamma < 1$), for which

we are able to replace the lack of entropy estimate by an \mathbb{L}^∞ -estimate as stated in Lemma 4.2.3.

Second, we need a positive lower bound of the mass. In the case of unbounded velocity domain, the mass is conserved. For a bounded velocity domain, we prove that the mass remains bounded from below in the case of a constant R . However, the numerical simulations in the last part of this paper suggest that this lower bound could fail for time-dependent R and even, the whole mass of the system may evaporate in finite time. The existence of a function R such that the corresponding solution f has a mass that vanishes at finite time is an open question. For this reason, we prove an existence result only on an interval on which the mass does not vanish. In Lemma 4.2.4, we prove that, at least on a small time interval, the total mass cannot vanish.

Once we have these two ingredients we prove in Lemma 4.2.5 a uniform ellipticity result. The end of Section 4.2.1 contains other estimates that are used in Section 4.2.2 where Theorem 4.2.1 is proved.

In Section 4.3 we construct a numerical scheme for (4.1.3) in the spherically symmetric case. The description of the scheme is given in Section 4.3.1 and its properties are gathered in Proposition 4.3.1. We prove that this scheme is stable for any value of γ as soon as a CFL condition is satisfied and we also prove that the discrete mass and the discrete energy are non increasing. Then, the numerical results are given in Section 4.3.2 which is divided in two parts. First, we consider the case of the constant radius and we make the comparison with the case $\gamma = 0$ which has already been studied in [10]. Second, we consider the radius given by (4.1.4) and we give numerical evidence for the vanishing of the mass, the energy and the radius at a finite time T^* which depends on the initial condition and the value of γ .

4.2 Theoretical Result

Our main result in this paper is the following:

Theorem 4.2.1. *Let $0 \leq \gamma < 1$, let $\ell \in]0, 1[$, $R : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ in the class $\mathcal{C}^{1,\ell}$, $f_0 \in \mathcal{B}^{\ell+2}(B_{R(0)})$. Then there exists $T^* \in]0, +\infty]$ such that*

i. *there exists a unique $f \in \mathcal{B}^{\frac{\ell}{2}+1,\ell+2}(D_{[0,T_*[})$ satisfying (4.1.3),*

ii. *either $T^* = +\infty$ or*

$$\lim_{t \rightarrow T^*} M_f(t) = 0$$

with M_f and E_f defined by (4.1.5). Besides, we have the following law

$$R^2 M'_f = E'_f. \tag{4.2.1}$$

If R is constant then $R^2 M_f - E_f$ is constant, the total mass is lower bounded by a positive constant:

$$M_f \geq M_{f_0} - \frac{E_{f_0}}{R^2} > 0,$$

and $T^* = +\infty$.

The sequel of this section is devoted to the proof of Theorem 4.2.1. We use a fixed point technique and first consider the linear problem

$$\partial_t f(t, v) = Q_L(f, g)(t, v). \quad (4.2.2)$$

The solution to (4.1.3) will be construct as the fixed point of the functional ϕ , that maps a function g to the solution f of (4.2.2). In Section 4.2.1 we give a priori estimates which are used in Section 4.2.2 where the fixed point proof is done.

4.2.1 Basic estimates

We have gathered here the estimates needed to prove existence and uniqueness of solutions. In all this section, f_0 is a nonnegative function of $\mathcal{C}(\overline{B_{R(0)}})$ and R is defined as in Section 4.1.2.

\mathbb{L}^p -estimates

First, we prove a global in time \mathbb{L}^1 -estimate using the fact that the mass is non increasing. Then we prove a \mathbb{L}^∞ -estimate on a fixed time interval $[0, T]$.

Lemma 4.2.2. *Let $T \in [0, +\infty]$, let $f, g \in \mathcal{B}^{1,2}(D_{[0,T]})$ be nonnegative functions such that f satisfies (4.1.3c) and (4.2.2). Then the mass M_f of f , defined by (4.1.5), is non increasing. Therefore we have:*

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T], \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3))} \leq M_{f_0}.$$

Proof. We compute the derivative of M_f . As f vanishes on $\mathbb{R}^3 \setminus B_{R(t)}$, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int f(t, v) dv &= \frac{d}{dt} \int_{B_{R(t)}} f(t, v) dv \\ &= \int_{B_{R(t)}} \partial_t f(t, v) dv \\ &= \int_{B_{R(t)}} \nabla \cdot \int_{B_{R(t)}} \mathcal{A}(v - v_*) (g_* \nabla f - \nabla g_* f) dv_* dv \\ &= \int_{\partial B_{R(t)}} \int_{B_{R(t)}} \nabla f^T \mathcal{A}(v - v_*) \frac{v}{R(t)} g_* dv_* d\sigma(v). \end{aligned}$$

Moreover, f is a nonnegative \mathcal{C}^1 function on $B_{R(t)}$ which vanishes on $\partial B_{R(t)}$. Hence, for any $v \in \partial B_{R(t)}$ there exists $\lambda(v) \geq 0$ such that

$$\nabla f(t, v) = -\lambda(v) \frac{v}{R(t)}.$$

We conclude the proof using that \mathcal{A} is a positive semi-definite matrix and that g is nonnegative. \square

Lemma 4.2.3. *Let $T > 0$, $f, g \in \mathcal{B}^{1,2}(D_{[0,T]})$ be nonnegative functions such that f satisfies (4.1.3c) and (4.2.2). Let M_g defined by (4.1.5). Assume that*

$$M_g \leq M_{f_0}. \quad (4.2.3)$$

Then, there exists a constant C_T which depends only on T , \bar{R}_T , γ and M_{f_0} such that:

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)} \leq C_T \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}.$$

Proof. We apply the maximum principle. Remark that

$$Q_L(f, g) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} A_{ij} \partial_{v_i, v_j}^2 f + B \cdot \nabla f + C f,$$

where

$$A(t, v) := \int \mathcal{A}(v - v_*) g(t, v_*) dv_*$$

is a positive semi-definite matrix because $\mathcal{A}(v - v_*)$ is positive semi-definite and $g(t, \cdot)$ is nonnegative,

$$\begin{aligned} B(t, v) &:= -2 \int g(t, v_*) |v - v_*|^\gamma (v - v_*) dv_*, \\ C(t, v) &:= 2 \int |v - v_*|^\gamma (v - v_*) \cdot \nabla g(t, v_*) dv_* \\ &= 2(\gamma + 3) \int |v - v_*|^\gamma g(t, v_*) dv_* \\ &\leq K \end{aligned}$$

with (here we use the hypothesis $\gamma \geq 0$)

$$K := 2(\gamma + 3)(2\bar{R}_T)^\gamma M_{f_0}.$$

Define, for $t \in [0, T]$ and $v \in \mathbb{R}^3$

$$h(t, v) := (\|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})} - f(t, v)) e^{-(K+1)t},$$

$$\tilde{Q}_L(f, g) := Q_L(f, g) - (K + 1)f.$$

We have

$$\begin{aligned}
\partial_t h(t, v) - \tilde{Q}_L(h, g)(t, v) &= -\frac{d}{dt} (f(t, v)e^{-(K+1)t}) + \tilde{Q}_L(fe^{-(K+1)\cdot}, g)(t, v) \\
&\quad + (K + 1 - C(t, v))\|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})} \\
&= (K + 1 - C(t, v))\|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

From the maximum principle we deduce that $h \geq 0$ and choosing:

$$C_T := \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})} e^{(K+1)T},$$

the lemma is proved. \square

Remark 10. As we are working on a bounded domain, the \mathbb{L}^∞ estimate gives an \mathbb{L}^p estimate for any $p \in [1, +\infty]$. Under the assumptions of Lemma 4.2.3 we have for $p \in [1, +\infty[$:

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^3))} \leq \left(\frac{4\pi \bar{R}_T^3}{3} \right)^{\frac{1}{p}} C_T \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}.$$

Ellipticity

In this section we prove the uniform ellipticity of the operator $Q_L(\cdot, g)$. For that purpose, we need a lower bound on the mass. We only prove that there exists a time T_0 , which depends only on the data of the problem, such that the mass is bounded from below by a positive constant on $[0, T_0]$. This allows us to prove a local existence result for any initial condition with a positive mass.

Lemma 4.2.4. *Let $T > 0$ be fixed and $f_0 \in \mathcal{B}^2(B_{R(0)})$ be nonnegative and nonzero. Then, there exists $T_0 \in]0, T]$ and $m_0 > 0$ which depend only on \bar{R}_T , \underline{R}_T , Γ_T (defined by (4.1.6)), γ , M_{f_0} and $\|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}$ such that for any nonnegative functions $f, g \in \mathcal{B}^{1,2}(D_{[0, T_0]})$ satisfying (4.1.3c)-(4.2.3)-(4.2.2) we have*

$$\forall t \in [0, T_0], \quad M_f(t) \geq m_0,$$

where M_f is defined by (4.1.5).

Proof. First, we prove that there exists $C_1 > 0$ which depends only on \bar{R}_T , \underline{R}_T , M_{f_0} and $\|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}$ such that

$$R^2(0)M_{f_0} - E_{f_0} \geq C_1.$$

Let $0 < r < R(0)$. Then,

$$\begin{aligned} \int_{B_{R(0)} \setminus B_r} f_0(v) \, dv &\leq |B_{R(0)} \setminus B_r| \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})} \\ &\leq C_2(R(0) - r) \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}, \end{aligned}$$

where C_2 is a constant that depends only on \bar{R}_T . Thus

$$\begin{aligned} R^2(0)M_{f_0} - E_{f_0} &= \int_{B_{R(0)}} (R^2(0) - v^2) f_0(v) \, dv \\ &\geq (R^2(0) - r^2) \int_{B_r} f_0(v) \, dv \\ &\geq R(0)(R(0) - r)(M_{f_0} - C_2(R(0) - r) \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}). \end{aligned}$$

We take

$$r := \max \left(0, R(0) - \frac{2M_{f_0}}{3C_2 \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}} \right),$$

to obtain

$$R^2(0)M_{f_0} - E_{f_0} \geq \min \left(\frac{\underline{R}_T^2 M_{f_0}}{3}, \frac{2\underline{R}_T M_{f_0}^2}{9C_2 \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}} \right) =: C_1.$$

Let

$$T_0 := \min \left(\frac{\underline{R}_T}{3\Gamma_T}, \frac{C_1}{12(2\bar{R}_T)^{\gamma+2} |B_{\bar{R}_T}|^2 \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}^2 + 6\Gamma_T \bar{R}_T |B_{\bar{R}_T}| \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}} \right).$$

With this choice of T_0 we have, for all $t \in [0, T_0]$,

$$\begin{aligned} t(4(2\bar{R}_T)^{\gamma+2} |B_{\bar{R}_T}|^2 \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}^2 + 2\Gamma_T \bar{R}_T |B_{\bar{R}_T}| \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}) \\ \leq \frac{1}{3}(R^2(0)M_{f_0} - E_{f_0}), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

$$R(t) - R(0) \leq t\Gamma_T \leq T_0\Gamma_T \leq \frac{1}{3}R(0),$$

$$R(t) \leq \frac{4}{3}R(0). \quad (4.2.5)$$

Let $f, g \in \mathcal{B}^{1,2}(D_{[0,T]})$ satisfying the assumptions of Lemma 4.2.4. We compute the derivative of E_f ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{B_{R(t)}} f(t, v) v^2 dv &= \int_{B_{R(t)}} \partial_t f(t, v) v^2 dv \\
&= \int_{B_{R(t)}} \nabla \cdot \int_{B_{R(t)}} \mathcal{A}(v - v_*) (g_* \nabla f - \nabla g_* f) dv_* v^2 dv \\
&= R^2(t) \int_{B_{R(t)}} \int_{\partial B_{R(t)}} \nabla f^T \mathcal{A}(v - v_*) \frac{v_*}{R(t)} g_* d\sigma(v_*) dv \\
&\quad - 2 \int_{B_{R(t)}^2} v^T \mathcal{A}(v - v_*) (g_* \nabla f - \nabla g_* f) dv_* dv. \\
R^2(t) M'_f(t) - E'_f(t) &= 2 \int_{B_{R(t)}^2} v^T \mathcal{A}(v - v_*) (g_* \nabla f - \nabla g_* f) dv_* dv \\
&= 8 \int_{B_{R(t)}^2} |v - v_*|^\gamma (v - v_*) \cdot v f g_* dv_* dv \\
&\quad - 4 \int_{B_{R(t)}^2} |v - v_*|^{\gamma+2} f g_* dv_* dv, \\
R^2(t) M'_f(t) - E'_f(t) &= 4 \int_{B_{R(t)}^2} |v - v_*|^\gamma (v^2 - v_*^2) f g_* dv_* dv. \tag{4.2.6}
\end{aligned}$$

Thus, using Lemma 4.2.2 and (4.2.3),

$$R^2(t) M'_f(t) - E'_f(t) \geq -4(2\bar{R}_T)^{\gamma+2} M_{f_0}^2,$$

and

$$\begin{aligned}
(R^2 M_f - E_f)' &= R^2 M'_f - E'_f + 2RR' M_f \\
&\geq -4(2\bar{R}_T)^{\gamma+2} M_{f_0}^2 - 2\Gamma_T \bar{R}_T M_{f_0}, \\
&\geq -4(2\bar{R}_T)^{\gamma+2} |B_{\bar{R}_T}|^2 \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}^2 - 2\Gamma_T \bar{R}_T |B_{\bar{R}_T}| \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}.
\end{aligned}$$

We now use (4.2.4) to obtain

$$\forall t \in [0, T_0], \quad R^2(t) M_f(t) - E_f(t) \geq \frac{2}{3} (R^2(0) M_{f_0} - E_{f_0}),$$

which, thanks to (4.2.5), yields

$$\forall t \in [0, T], \quad M_f(t) \geq \frac{2(R^2(0) M_{f_0} - E_{f_0})}{3R^2(t)} \geq \frac{3}{8} \left(M_{f_0} - \frac{E_{f_0}}{R^2(0)} \right) \geq \frac{3C_1}{8\bar{R}_T^2}.$$

Thus, taking $m_0 := \frac{3C_1}{8\bar{R}_T^2}$, this concludes the proof of the Lemma. \square

Lemma 4.2.5. *Let $T > 0$. Let $g \in \mathcal{B}^{1,2}(D_{[0,T]})$ be nonnegative and let M_g be defined by (4.1.5). Suppose that M_g is bounded from below by a positive constant and let m and K be positive constants such that*

$$m \leq M_g \text{ and } \|g\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)} \leq K.$$

Then, there exists a positive constant λ_T , which depends only on \bar{R}_T , γ , m and K such that

$$\forall t \in [0, T], \forall v \in B_{R(t)}, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \xi^T \int_{B_{R(t)}} \mathcal{A}(v - v_*) g(v_*) dv_* \xi \geq \lambda_T \xi^2.$$

Proof. We adapt a proof in [21] to bounded domains. Let $t \in [0, T]$, $v \in B_{R(t)}$ and $\xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 1)$. For $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ and $\rho > 0$ we define

$$\mathcal{C}_\theta := \left\{ v_* \in \mathbb{R}^3 \left| \left| \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \xi \right| \geq \cos \theta \right. \right\},$$

$$F_{\rho, \theta} := (\mathcal{C}_\theta \cup \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(v, \rho)) \cap B_{R(t)}.$$

We can bound the volume of $F_{\rho, \theta}$ by

$$|F_{\rho, \theta}| \leq \frac{4\pi}{3} \rho^3 + 8\pi \bar{R}_T^3 \tan^2 \theta.$$

For $v_* \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}_\theta$

$$\xi^T \Pi(v - v_*) \xi = \xi \cdot \left(\xi - \left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \xi \right) \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \right) \geq 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta.$$

Hence we have

$$\begin{aligned} \xi^T \int_{B_{R(t)}} \mathcal{A}(v - v_*) g(t, v_*) dv_* \xi &= \int_{B_{R(t)}} |v - v_*|^{\gamma+2} \xi^T \Pi(v - v_*) \xi g(t, v_*) dv_* \\ &\geq \rho^{\gamma+2} \sin^2 \theta \int_{B_{R(t)} \setminus F_{\rho, \theta}} g(t, v_*) dv_* \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int_{B_{R(t)} \setminus F_{\rho, \theta}} g(t, v_*) dv_* &\geq M_g - |F_{\rho, \theta}| \|g\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)} \\ &\geq m - \left(\frac{4\pi}{3} \rho^3 + 8\pi \bar{R}_T^3 \tan^2 \theta \right) K. \end{aligned}$$

Let us fix $\rho_0 > 0$ and $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (depending only on \bar{R}_T , m and K) such that

$$\left(\frac{4\pi}{3} \rho^3 + 8\pi \bar{R}_T^3 \tan^2 \theta \right) K \leq \frac{m}{2},$$

then we have

$$\int_{B_r \setminus F_{\rho_0, \theta_0}} g(t, v_*) dv_* \geq \frac{m}{2}.$$

Finally we choose

$$\lambda_T := \frac{\rho_0^{\gamma+2} \sin^2 \theta_0}{2} m$$

and the proof of Lemma is complete. \square

H^1 -estimates

In this section we prove two results. The first is an estimate of the Landau collision kernel. The second is an estimate in the norm $\|\cdot\|_{X_T}$ (defined by (4.1.7)) of a solution to (4.2.2).

Lemma 4.2.6. *Let $T > 0$, $f, g \in \mathcal{B}^{1,2}(D_{[0,T]})$. Then there exists a constant C which depends only on γ and \bar{R}_T such that*

$$\forall t \in [0, T], \quad \|Q_L(f, g)(t, \cdot)\|_{H^{-1}(B_{R(t)})} \leq C \|g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Proof. Let $t \in [0, T]$, $\varphi \in H_0^1(B_{R(t)})$, we have

$$\begin{aligned} \int_{B_{R(t)}} Q_L(f, g)(t, v) \varphi(v) dv &= - \int_{B_{R(t)}^2} \nabla \varphi^T(v) \mathcal{A}(v - v_*) (g_* \nabla f - f \nabla g_*) dv dv_*, \\ \left| \int_{B_{R(t)}^2} \nabla \varphi^T(v) \mathcal{A}(v - v_*) g_* \nabla f dv dv_* \right| &\leq (2\bar{R}_T)^{\gamma+2} \|g\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)} \int_{B_{R(t)}} |\nabla \varphi| |\nabla f(v)| dv \\ &\leq (2\bar{R}_T)^{\gamma+2} \|g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\varphi\|_{H^1(B_{R(t)})}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_{R(t)}^2} \nabla \varphi^T \mathcal{A}(v - v_*) \nabla g_* f dv dv_* \right| &= 2 \left| \int_{B_{R(t)}^2} |v - v_*|^\gamma \nabla \varphi(v) \cdot (v - v_*) g_* f dv dv_* \right| \\ &\leq 2(2\bar{R}_T)^{\gamma+1} \|g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)} \|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\varphi\|_{H^1(B_{R(t)})}. \end{aligned}$$

To conclude, we observe, from the inequality of Poincaré, that there exists a constant c which depends only on \bar{R}_T such that

$$\|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c \|\nabla f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

\square

Lemma 4.2.7. *Let $T > 0$. Let $f, g \in \mathcal{B}^{1,2}(D_{[0,T]})$ be nonnegative functions which satisfy (4.1.3c) and (4.2.2). Let M_f, E_f, M_g and E_g be defined by (4.1.5) and assume that (4.2.3) holds and that M_g is bounded from below by a positive constant. Let m and K be positive constants such that*

$$m \leq M_g \quad \text{and} \quad \|g\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)} \leq K.$$

Then there exists a constant K_T which depends only on $T, \gamma, \bar{R}_T, M_{f_0}, m$ and K such that:

$$\|f\|_{X_T} \leq K_T \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)}),}$$

where $\|\cdot\|_{X_T}$ is defined by (4.1.7).

Proof. We compute

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B_{R(t)}} f^2(t, v) dv &= 2 \int_{B_{R(t)}} f(t, v) \partial_t f(t, v) dv \\ &= -2 \int_{B_{R(t)}^2} \nabla f^T \mathcal{A}(v - v_*) \nabla f g_* dv_* dv \\ &\quad + \int_{B_{R(t)}^2} \nabla g_*^T \mathcal{A}(v - v_*) \nabla(f^2) dv_* dv. \\ \int_{B_{R(t)}^2} \nabla g_*^T \mathcal{A}(v - v_*) \nabla(f^2) dv_* dv &= 2 \int_{B_{R(t)}^2} |v - v_*|^\gamma (v - v_*) \cdot \nabla g_* f^2 dv_* dv \\ &= 2(\gamma + 3) \int_{B_{R(t)}^2} |v - v_*|^\gamma f^2 g_* dv_* dv. \end{aligned}$$

Thus, using Remark 10 and Lemma 4.2.5 we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right) + 2\lambda_T \|\nabla f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq 2(\gamma + 3)(2\bar{R}_T)^\gamma M_{f_0} \|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\leq \tilde{K}_T \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}^2, \end{aligned}$$

with \tilde{K}_T a constant depending only on T, \bar{R}_T, γ and M_{f_0} . Integrating this inequality between 0 and T yields:

$$2\lambda_T \|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)}^2 \leq \|f_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + T \tilde{K}_T \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}^2.$$

Then it is clear that

$$\|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} \leq \hat{K}_T \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})},$$

with \hat{K}_T depending only on $T, \bar{R}_T, \gamma, M_{f_0}, m$ and K . Once we have estimated f and ∇f , we conclude the proof of Lemma 4.2.7 using (4.2.2) and Lemma 4.2.6. \square

Hölder estimates

Here we prove a Hölder estimate for the coefficients of (4.2.2).

Lemma 4.2.8. *Let $T > 0$, $g \in X_T$ (the space X_T being defined by (4.1.7)) such that its trace on $\{(t, v) | t \in [0, T], v \in \partial B_{R(t)}\}$ is zero and $\nabla g \in \mathbb{L}^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$. Then there exists $0 \leq \alpha \leq 1$ such that the coefficients*

$$\begin{aligned} A_g(t, v) &:= \int_{B_{R(t)}} \mathcal{A}(v - v_*) g(t, v_*) \, dv_*, \\ B_g(t, v) &:= -2 \int_{B_{R(t)}} g(t, v_*) |v - v_*|^\gamma (v - v_*) \, dv_*, \\ C_g(t, v) &:= 2 \int_{B_{R(t)}} |v - v_*|^\gamma (v - v_*) \cdot \nabla g(t, v_*) \, dv_*, \\ &= 2(\gamma + 3) \int_{B_{R(t)}} |v - v_*|^\gamma g(t, v_*) \, dv_*, \end{aligned}$$

belong to $\mathcal{B}^{\frac{\alpha}{2}, \alpha}(D_{[0, T]})$. Furthermore, if $g \in \mathcal{B}^{1, 2}(D_{[0, T]})$ then the coefficients belong to $\mathcal{B}^{\frac{\alpha}{2}, \alpha}(D_{[0, T]})$ for any $0 \leq \alpha \leq 1$.

Proof. First, it is easy to check that A_g , B_g are differentiable with respect to the v variable. As $D_{[0, T]}$ is bounded in the v variable and $g \in \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3))$, A_g and B_g are then α -Hölder continuous in the v variable for any $0 \leq \alpha \leq 1$. If $\gamma = 0$ then C_g is constant in v and is α -Hölder continuous for any α . If $0 < \gamma < 1$ then C_g is γ -Hölder continuous in v .

Secondly, thanks to the Sobolev embedding

$$H^1([0, T], \mathbb{L}^2(B_R)) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\frac{1}{2}}([0, T], \mathbb{L}^2(B_R)),$$

it is clear that the coefficients A_g , B_g and C_g are $\frac{\alpha}{2}$ -Hölder continuous in the t variable for any $0 \leq \alpha \leq 1$. Finally we can choose $\alpha = \gamma$ if $\gamma > 0$ and $\alpha = 1$ otherwise. Now, if $g \in \mathcal{B}^{1, 2}(D_{[0, T]})$, then C_g is clearly \mathcal{C}^1 in the v variable and thus α -Hölder continuous for any $0 \leq \alpha \leq 1$. \square

4.2.2 Existence proof

First step

Let $T > 0$ be fixed once for all. We prove that there exists a time $T_1 \in]0, T]$ such that, there exists a unique regular solution to (4.1.3) up to time T_1 .

Let $f_0 \in \mathcal{B}^{\ell+2}(B_{R(0)})$. Let T_0 and m_0 be given by Lemma 4.2.4. Let $T_1 \in]0, T_0]$. We can construct a function $g_0 \in \mathcal{B}^{\frac{\ell}{2}+1, \ell+2}(D_{[0, T_1]})$ which is nonnegative and such that $M_{g_0} = M_{f_0}$. Indeed, consider a function $h \in \mathcal{C}_c^\infty(B_{\underline{R}_T})$, where $\underline{R}_T := \inf_{[0, T]} R$, nonnegative and such that $M_h = M_{f_0}$ and define $g_0(t, \cdot) = h$ for any $t \in [0, T]$.

Let C_{T_1} be the constant given by the Lemma 4.2.3. It depends only on T_1 , \bar{R}_{T_1} , γ and M_{f_0} and since it is clear from the proof of the Lemma that it can be chosen as a nondecreasing function of T_1 , \bar{R}_{T_1} and M_{f_0} , we can replace it by a constant C_T which depends only on T , \bar{R}_T , γ and M_{f_0} . We define

$$K := \max(\|g_0\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)}, C_T \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}),$$

$$F := \{g \in \mathcal{B}^{\frac{\ell}{2}+1, \ell+2}(D_{[0, T_1]}) : g \geq 0, m_0 \leq M_g \leq M_{f_0}, \|g\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \leq K\}.$$

The set F is nonempty because it contains $g_0|_{[0, T_1]}$. Let $g \in F$. Then, thanks to Lemma 4.2.8 and Lemma 4.2.5 and the hypothesis on f_0 , we can apply existence results for linear parabolic equations (see [23, 28]) to define the solution $\phi(g) \in \mathcal{B}^{\frac{\ell}{2}+1, \ell+2}(D_{[0, T_0]})$ of (4.2.2), (4.1.3b) and (4.1.3c). From the maximum principle, $\phi(g)$ satisfies (4.1.3d), and from Lemmas 4.2.2, 4.2.4, 4.2.3 we deduce that $\phi(g) \in F$.

Now let us take $g, \hat{g} \in F$, then $\phi(g) - \phi(\hat{g})$ is a solution to

$$\partial_t(\phi(g) - \phi(\hat{g})) - Q_L(\phi(g) - \phi(\hat{g}), g) = Q_L(\phi(\hat{g}), g - \hat{g}). \quad (4.2.7)$$

For convenience, let us denote $\psi := \phi(g) - \phi(\hat{g})$ and $\chi := g - \hat{g}$. The same calculation as in the proof of Lemma 4.2.7 leads to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(t, v)^2 dv &= -2 \int_{B_{R(t)}^2} \nabla \psi^T \mathcal{A}(v - v_*) \nabla \psi g_* dv dv_* \\ &\quad + 2(\gamma + 3) \int_{B_{R(t)}^2} |v - v_*|^\gamma \psi^2 g_* dv dv_* \\ &\quad + \int_{B_{R(t)}} Q_L(\phi(\hat{g}), \chi)(t, v) \psi(t, v) dv. \end{aligned}$$

From Lemma 4.2.6, there exists a constant C which depends only on γ and \bar{R}_T such that

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B_{R(t)}} Q_L(\phi(\hat{g}), \chi)(t, v) \psi(t, v) dv \right| \\ &\leq C \|\nabla \phi(\hat{g})(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\chi\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \lambda_T \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{C^2}{4\lambda_T} \|\chi\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla \phi(\hat{g})(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2, \end{aligned}$$

where λ_T is the constant of Lemma 4.2.5. Hence we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|\psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right) + \lambda_T \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ \leq \frac{C^2}{4\lambda_T} \|\chi\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla \phi(\hat{g})(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + 2(2\bar{R}_T)^\gamma (\gamma + 3) M_{f_0} \|\psi(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

By Gronwall's Lemma and since $\psi(0, \cdot) = 0$, we have

$$\|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_1], \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3))}^2 \leq \frac{C^2}{4\lambda_T} \|\nabla \phi(\hat{g})\|_{\mathbb{L}^2([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)}^2 e^{2(2\bar{R}_T)^\gamma (\gamma + 3) M_{f_0} T} \|\chi\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)}^2.$$

Using this bound in (4.2.8) and integrating between 0 and T_1 gives

$$\|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^2([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \leq C_1 \|\nabla \phi(\hat{g})\|_{\mathbb{L}^2([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \|\chi\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)}, \quad (4.2.9)$$

where C_1 is a constant which depends only on γ , \bar{R}_T , M_{f_0} , $\|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}$ and T . Now let us fix a function $g_0 \in F$. Applying (4.2.9) with (\hat{g}, g_0) in place of (g, \hat{g}) leads to

$$\begin{aligned} \|\nabla \phi(\hat{g})\|_{\mathbb{L}^2([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} &\leq \|\nabla \phi(g_0)\|_{\mathbb{L}^2([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} (1 + C_1 \|\hat{g} - g_0\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)}) \\ &\leq \|\nabla \phi(g_0)\|_{\mathbb{L}^2([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} (1 + 2C_1 K). \end{aligned}$$

Finally, as ψ is a solution to (4.2.7) and using Lemma 4.2.6, there exists a constant C_2 which depends only on γ , \bar{R}_T , M_{f_0} , $\|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(B_{R(0)})}$ and T such that

$$\|\phi(g) - \phi(\hat{g})\|_{X_{T_1}} \leq C_2 \|\nabla \phi(g_0)\|_{\mathbb{L}^2([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \|g - \hat{g}\|_{X_{T_1}}.$$

Now we can choose $T_1 > 0$ such that

$$C_2 \|\nabla \phi(g_0)\|_{\mathbb{L}^2([0, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{2}.$$

With this choice of T_1 , ϕ is a contraction mapping in the $\|\cdot\|_{X_{T_1}}$ norm. The set F is not closed under $\|\cdot\|_{X_{T_1}}$ and then we cannot apply directly the Picard-Banach fixed point theorem. Nevertheless, the sequence defined by

$$g_{n+1} := \phi(g_n)$$

is a Cauchy sequence for the $\|\cdot\|_{X_{T_1}}$ norm and it is straightforward to see that its limit f is then a weak solution of (4.1.3). As $f \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^3)$, M_f and E_f are continuous and in fact $\nabla f \in \mathbb{L}^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ (see [28]). Thanks to Lemma 4.2.8 and Hölder regularity results for linear parabolic equations (see [23, 28]) we can conclude that $f \in \mathcal{B}^{\frac{\alpha}{2}+1, \alpha+2}(D_{[0, T_0]})$. Then, by a bootstrap technique, since the regularity of the coefficients depends on the regularity of f , we have $f \in \mathcal{B}^{\frac{\ell}{2}+1, \ell+2}(D_{[0, T_0]})$ and f is a classical solution to (4.1.3). This is the unique solution, because if \tilde{f} is another solution, with the definition of T_0 and Lemmas 4.2.2, 4.2.3 and 4.2.7, $\tilde{f} \in F$ and \tilde{f} is a fixed point of ϕ . Hence we necessarily have $\tilde{f} = f$.

Second step

We now define T^* as the supremum bound of the set of nonnegative real numbers T such that there exists a regular solution on $D_{[0,T[}$. From the first step we have $T^* > 0$. If $T^* = +\infty$ then the theorem is proved. If $T^* < +\infty$, we can construct a regular solution f on $D_{[0,T^*[}$ which is unique. As M_f is non increasing and nonnegative it has a limit M^* when t tends to T^* .

Suppose $M^* > 0$. Then, thanks to Remark 10, we have $\|f\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T^*], \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3))} < +\infty$, and from 4.2.7 we have finally $f \in X_{T^*}$. As before, by regularity considerations $f \in \mathcal{B}_2^{\ell+1, \ell+2}(D_{[0,T^*]})$. Thus, we can apply the construction performed in the first step to extend the solution on an interval $[0, \hat{T}]$ with $\hat{T} > T^*$ and this is in contradiction with the definition of T^* . This proves that $M^* = 0$.

To end the proof of Theorem 4.2.1, we now prove (4.2.1). Let f be a classical solution to (4.1.3). From (4.2.6) we have

$$R^2(t)M'_f(t) - E'_f(t) = 4 \int_{B_{R(t)}^2} |v - v_*|^\gamma (v^2 - v_*^2) f f_* \, dv \, dv_* = 0.$$

4.3 Numerical scheme and simulations

To perform numerical tests, we construct a conservative numerical scheme by generalizing a scheme presented in [10]. This scheme can be applied to any bounded function $R(t)$ but in the simulations we only consider a function R which is either a constant or given by the law (4.1.4). We restrict ourselves to the spherically symmetric case, which is a $1D$ problem in space and is therefore easier to implement. The Landau collision kernel (4.1.2) is clearly invariant under orthogonal transformations of the velocity variable and has a simple expression in spherical coordinates, given in the following Lemma.

Lemma 4.3.1. *Let $\gamma \in [-3, 1]$, $R : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continuous and $f \in \mathcal{B}^{1,2}(D_{[0,+\infty[})$ spherically symmetric in the v variable. Let us denote abusively*

$$f(t, r) := f(t, v),$$

with $r := |v|$. Then

$$Q_L(f, f)(t, v) = \frac{1}{r^2} \partial_r \int_0^{R(t)} K(r, r_*) \left(f_* \frac{\partial_r f}{r} - f \frac{\partial_r f_*}{r_*} \right) dr_*,$$

with

$$K(r, r_*) := 2\pi r^3 r_*^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta (r^2 + r_*^2 - 2rr_* \cos \theta)^{\frac{\gamma}{2}} d\theta. \quad (4.3.1)$$

Besides, if $\gamma \neq -2$ we have

$$K(r, r_*) := \frac{4\pi r r_*^2}{(\gamma + 2)(\gamma + 4)} \left(((r + r_*)^{\gamma+4} + |r - r_*|^{\gamma+4}) - \frac{(r + r_*)^{\gamma+6} - |r - r_*|^{\gamma+6}}{r r_*(\gamma + 6)} \right)$$

and if $\gamma = -2$,

$$K(r, r_*) = \begin{cases} \pi r_* \left(r r_* (r^2 + r_*^2) + (r^2 - r_*^2)^2 \ln \left(\frac{\sqrt{|r - r_*|}}{\sqrt{r + r_*}} \right) \right) & \text{if } r \neq r_*, \\ 2\pi r^5 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. This is a simple calculation which can be found in [10]. \square

It is more convenient to work with the new coordinates $\varepsilon := r^2$ and $\varepsilon_* := r_*^2$. With such coordinates the Landau kernel becomes

$$Q_L(f, f)(t, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \partial_\varepsilon \int_0^{R(t)^2} \kappa(\varepsilon, \varepsilon_*) (f_* \partial_\varepsilon f - f \partial_\varepsilon f_*) d\varepsilon_*, \quad (4.3.2)$$

with

$$\kappa(\varepsilon, \varepsilon_*) := \frac{8\pi}{(\gamma + 2)(\gamma + 4)} \left(\sqrt{\varepsilon \varepsilon_*} ((\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_*})^{\gamma+4} + |\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_*}|^{\gamma+4}) - \frac{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_*})^{\gamma+6} - |\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_*}|^{\gamma+6}}{\gamma + 6} \right). \quad (4.3.3)$$

if $\gamma \neq -2$ and if $\gamma = -2$

$$\kappa(\varepsilon, \varepsilon_*) = \begin{cases} 2\pi \left(\sqrt{\varepsilon \varepsilon_*} (\varepsilon + \varepsilon_*) + (\varepsilon - \varepsilon_*)^2 \ln \left(\frac{\sqrt{|\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_*}|}}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_*}}}} \right) \right) & \text{if } \varepsilon \neq \varepsilon_*, \\ 4\pi \varepsilon^2 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Let us list some properties of κ .

Lemma 4.3.2. *Let $\gamma \in [-3, 1[$ and κ be defined by (4.3.3) and (4.3.4) on \mathbb{R}_+^2 . We have the following properties:*

- i. $(\varepsilon, \varepsilon_*) \mapsto \frac{\kappa(\varepsilon, \varepsilon_*)}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_*}}$ is well defined and continuous on \mathbb{R}_+^2 . Besides, for each compact K of \mathbb{R}_+^2 , there exists $C_K > 0$ which depend only on K such that:

$$\forall (\varepsilon, \varepsilon_*) \in K, \quad \kappa(\varepsilon, \varepsilon_*) \leq C_K \sqrt{\varepsilon \varepsilon_*}.$$

ii. $\kappa \geq 0$,

iii. $(\varepsilon = 0 \text{ or } \varepsilon_* = 0) \Rightarrow \kappa(\varepsilon, \varepsilon_*) = 0$,

iv. $\forall \varepsilon, \varepsilon_* \in \mathbb{R}_+, \quad \kappa(\varepsilon, \varepsilon_*) = \kappa(\varepsilon_*, \varepsilon)$,

v. For any $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, the function $\varepsilon_* \mapsto \kappa(\varepsilon, \varepsilon_*)$ is non decreasing.

Proof. The proof of (iii) and (iv) is obvious from the definitions. From (4.3.1) we deduce that, for $\varepsilon \varepsilon_* > 0$,

$$\kappa(\varepsilon, \varepsilon_*) = 4\pi \varepsilon^{\frac{3}{2}} \varepsilon_*^{\frac{3}{2}} \int_0^\pi \sin^3 \theta \left(\sqrt{\varepsilon + \varepsilon_* - 2\sqrt{\varepsilon \varepsilon_*} \cos \theta} \right)^\gamma d\theta \geq 0,$$

and (ii) is proved because the case $\varepsilon \varepsilon_* = 0$ is trivial. To prove (i) we just need to prove the continuity at zero because the continuity on $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$ is clear. Let us denote

$$\sqrt{\varepsilon} =: \rho \cos \alpha, \quad \sqrt{\varepsilon_*} =: \rho \sin \alpha,$$

with $\rho \in]0, +\infty[$ and $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Then,

$$\frac{\kappa(\varepsilon, \varepsilon_*)}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_*}} = \pi \rho^{\gamma+4} \sin^2(2\alpha) \int_0^\pi \sin^3 \theta (1 - \sin(2\alpha) \cos \theta)^{\frac{\gamma}{2}} d\theta.$$

Note that, if $-3 \leq \gamma < 0$

$$0 \leq \int_0^\pi \sin^3 \theta (1 - \sin(2\alpha) \cos \theta)^{\frac{\gamma}{2}} d\theta \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^3 \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 \theta}{(1 - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \leq 4,$$

and if $0 \leq \gamma < 1$,

$$0 \leq \int_0^\pi \sin^3 \theta (1 - \sin(2\alpha) \cos \theta)^{\frac{\gamma}{2}} d\theta \leq \sqrt{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Finally we have

$$0 \leq \frac{\kappa(\varepsilon, \varepsilon_*)}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_*}} \leq 4\pi(\varepsilon + \varepsilon_*)^{\frac{\gamma+4}{2}} \xrightarrow{\varepsilon, \varepsilon_* \rightarrow 0} 0,$$

and it is clear that, on any compact K of \mathbb{R}_+^2 , $(\varepsilon + \varepsilon_*)^{\frac{\gamma+4}{2}}$ is bounded uniformly in γ . Now we prove (v). Since $\gamma \mapsto \kappa(\varepsilon, \varepsilon_*)$ is a continuous function, we can suppose $\gamma \neq -2$ and use (4.3.3). Let us prove that

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{xy((x+y)^{\gamma+4} + |x-y|^{\gamma+4})}{\gamma+2} - \frac{(x+y)^{\gamma+6} - |x-y|^{\gamma+6}}{(\gamma+6)(\gamma+2)} \end{aligned}$$

is non increasing in the y variable. We compute:

$$\begin{aligned}\partial_y \varphi(x, y) &= \frac{y(|x - y|^{\gamma+4} - (x + y)^{\gamma+4})}{\gamma + 2} \\ &\quad + \frac{(\gamma + 4)xy((x + y)^{\gamma+3} + (y - x)|x - y|^{\gamma+2})}{\gamma + 2},\end{aligned}$$

$$\partial_y \varphi(0, y) = 0,$$

$$\partial_{xy}^2 \varphi(x, y) = \frac{(\gamma + 4)(\gamma + 3)}{(\gamma + 2)} xy((x + y)^{\gamma+2} - |x - y|^{\gamma+2}) \geq 0.$$

Therefore, $\partial_y \varphi(x, y) \geq 0$ and we have proved (v). \square

4.3.1 Construction of the numerical scheme

Without loss of generality we may assume that the support of the initial condition is contained in the unit ball B_1 . We will suppose here that the function R is bounded by 2. This hypothesis is motivated by the following remark:

Remark 11. Theorem 4.2.1 does not prove the existence of solution in the case where R follows (4.1.4) but if a solution exists then it is easy to prove from (4.2.1) that R is non increasing and that we have:

$$\frac{E_f}{E_{f_0}} = \left(\frac{M_f}{M_{f_0}} \right)^{1-\gamma}, \quad \frac{R}{R(0)} = \left(\frac{M_f}{M_{f_0}} \right)^{-\frac{\gamma}{2}} \quad (4.3.5)$$

Indeed, from (4.1.5) it is clear that

$$E_f \leq R^2 M_f.$$

Besides, From Lemma 4.2.2, M_f is non increasing and

$$\left(\frac{E_f}{M_f} \right)' = \frac{E'_f M_f - E_f M'_f}{M_f^2} = (R^2 M_f - E_f) \frac{M'_f}{M_f^2} \leq 0.$$

Thus, if R follows (4.1.4) it is non increasing. Moreover, from (4.2.1) and (4.1.4) we have

$$(1 - \gamma) \frac{M'_f}{M_f} = \frac{E'_f}{E_f}.$$

That proves the first part of (4.3.5), the second part is then deduced from the first part using (4.1.4).

In particular, since we have supposed that the support of the initial condition is contained in B_1 we have

$$R \leq R(0) = \sqrt{(1 - \gamma) \frac{E_{f_0}}{M_{f_0}}} \leq \sqrt{1 - \gamma} \leq 2$$

for $\gamma \geq -3$. That is why, in the numerical scheme, we will suppose that $R \leq 2$. In practice we do not have to impose this hypothesis since in the simulations the radius is observed to be non increasing. To avoid the singularity at 0 due to the spherical symmetry, we use a shifted velocity grid, but for convenience we shall also use the grid of the middle points which contains 0. We consider the following set of indices

$$X := [0, 4N + 2] \cap \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

where $N \in \mathbb{N}^*$ and we define

$$\Delta\varepsilon := \frac{2}{2N + 1}.$$

The value of the time step Δt will be chosen later according to a CFL condition to ensure the stability of the scheme. The grid is then defined by

$$\varepsilon_k := k\Delta\varepsilon, \quad k \in X. \quad t_n := n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

The velocity step $\Delta\varepsilon$ and the set of indices X are chosen such that

- the velocity grid covers $[0, 4]$, i.e. $r^2 = \varepsilon \leq 4$,
- 1 is a point of the sub-grid of non integer indices. It is useful only for initial conditions whose support is exactly B_1 .

We use the following discrete derivation with respect to the ε variable:

$$D_k g_k := \begin{cases} \frac{g_{k+\frac{1}{2}} - g_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta\varepsilon} & \text{if } k \in X \setminus \{0, 4N + 2\}, \\ 0 & \text{if } k = 0, \\ -\frac{g_{4N+\frac{3}{2}}}{\Delta\varepsilon} & \text{if } k = 4N + 2. \end{cases}$$

We define two distinct discrete integral, using integer indices and non integer indices respectively

$$I_k(g_k) := \sum_{k \in X \cap \mathbb{Z}} g_k \Delta\varepsilon, \quad J_k(g_k) := \sum_{k \in X \setminus \mathbb{Z}} g_k \Delta\varepsilon.$$

We shall calculate an approximation f_k^n of $f(t_n, \varepsilon_k)$ for $n \in \mathbb{N}$ and $k \in X \setminus \mathbb{Z}$. However, to have an easy-handling formulation of the scheme, we will also introduce artificial values on the grid of middle points setting

$$f_k^n := f_{k+\frac{1}{2}}^n, \quad k \in X \cap \mathbb{Z}. \quad (4.3.6)$$

In the numerical scheme we need the initial condition

$$f_k^0 := \begin{cases} f_0(\varepsilon_k), & k \in X \setminus \mathbb{Z}, k \leq N + \frac{1}{2}, \\ 0, & k \in X \setminus \mathbb{Z}, k > N + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (4.3.7)$$

and the homogeneous Dirichlet condition

$$f_k^n := 0, \quad k \in X \setminus \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, k \geq \frac{R_{n-1}^2}{\Delta \varepsilon}, \quad (4.3.8)$$

where R_n is either a given sequence contained in $[0, 2]$ or is defined by

$$R_n := \sqrt{(1 - \gamma) \frac{E_n}{M_n}}, \quad (4.3.9)$$

with

$$M_n := 2\pi J_k \left(f_k^n \varepsilon_k^{\frac{1}{2}} \right), \quad E_n := 2\pi J_k \left(f_k^n \varepsilon_k^{\frac{3}{2}} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.3.10)$$

Finally, using the discrete formulation of (4.3.2), we define

$$f_k^{n+1} := f_k^n + \frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_k}} D_k I_{k*} \left(\kappa_{k,k*} (f_{k*}^n D_k f_k^n - f_k^n D_{k*} f_{k*}^n) \right), \quad (4.3.11)$$

$$k \in X \setminus \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, k < \frac{R_n^2}{\Delta \varepsilon},$$

with $\kappa_{k,k*} := \kappa(\varepsilon_k, \varepsilon_{k*})$. This scheme has the following properties,

Proposition 4.3.1. *Let $\gamma \in [-3, 1[$ and f_0 be a nonnegative function on $[0, 1]$ such that $f_0(1) = 0$. Let f_k^n be defined by (4.3.6), (4.3.7), (4.3.8), (4.3.11) and define M_n and E_n by (4.3.10). Then there exists a positive constant C , which depends only on M_0 , such that, if $\Delta t \leq C(\Delta \varepsilon)^2$ then*

$$\forall k \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_k^n \geq 0, \quad (4.3.12)$$

Furthermore, with such a Δt we have the following properties:

$$i. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} \leq M_n \leq M_0,$$

$$ii. \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_{n+1} \leq E_n \leq E_0,$$

iii. Assume that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = R \geq 1,$$

then

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_{k_R} M_n - E_n = \varepsilon_{k_R} M_0 - E_0,$$

with $k_R := \min\{k \in X \setminus \mathbb{Z} \mid \varepsilon_k \geq R^2\}$.

Remark 12. The properties (4.3.12) and (i) ensure the \mathbb{L}^1 -stability of the scheme.

Remark 13. The property (iii) is the discrete formulation of the conservation of $R^2 M_f - E_f$.

Proof. For convenience, let us denote

$$A(f_k^n) := I_{k_*} \left(\kappa_{k,k_*} (f_{k_*}^n D_k f_k^n - f_k^n D_{k_*} f_{k_*}^n) \right), \quad k \in X \cap \mathbb{Z}.$$

We prove the result by an induction on n . Let $n \in \mathbb{N}$ and suppose that

$$\begin{cases} \forall k \in X, f_k^n \geq 0, \\ M_n \leq M_0, \\ E_n \leq E_0, \end{cases} \quad (4.3.13)$$

and, if $R_n = R \geq 1$, we add the hypothesis

$$\varepsilon_{k_R} M_n - E_n = \varepsilon_{k_R} M_0 - E_0. \quad (4.3.14)$$

If $R_n < R_{n-1}$ then the new values f_k^{n+1} are calculated as if the radius was constant except that the values corresponding to indices greater than $\frac{R_n^2}{\Delta \varepsilon}$ are set to 0. Whereas if $R_n > R_{n-1}$ then the new values f_k^{n+1} are calculated exactly as if the radius was constant. Therefore we can deduce the non constant radius case from the constant radius case, because the values calculated at step $n+1$ are the same except if $R_n < R_{n-1}$ and (4.3.13) is still satisfied if some values are set to 0. So, let us suppose that the radius is constant equal to R and let us look at the variation of M_n :

$$\begin{aligned} M_{n+1} - M_n &= 2\pi J_k \left((f_k^{n+1} - f_k^n) \sqrt{\varepsilon_k} \right) \\ &= 2\pi \Delta t \sum_{k=0}^{k_R - \frac{3}{2}} \left(A(f_{k+1}^n) - A(f_k^n) \right) \\ &= 2\pi \Delta t A \left(f_{k_R - \frac{1}{2}}^n \right) \\ &= -2\pi \frac{\Delta t}{\Delta \varepsilon} f_{k_R - 1}^n I_{k_*} \left(\kappa_{k_R - \frac{1}{2}, k_*} f_{k_*}^n \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

This last inequality comes from (4.3.13) and the fact that $\kappa_{k,k_*} \geq 0$ thanks to Lemma 4.3.2. We do the same calculation for E_n :

$$\begin{aligned}
E_{n+1} - E_n &= 2\pi J_k \left((f_k^{n+1} - f_k^n) \varepsilon_k^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= 2\pi \Delta t \sum_{k=0}^{k_R - \frac{3}{2}} (A(f_{k+1}^n) - A(f_k^n)) \varepsilon_{k+\frac{1}{2}} \\
&= 2\pi \Delta t A \left(f_{k_R - \frac{1}{2}}^n \right) \varepsilon_{k_R} - 2\pi \Delta t \sum_{k=1}^{k_R - \frac{1}{2}} A(f_k^n) (\varepsilon_{k+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{k-\frac{1}{2}}) \\
&= -2\pi \frac{\Delta t}{\Delta \varepsilon} f_{k_R-1}^n I_{k_*} \left(\kappa_{k_R - \frac{1}{2}, k_*} f_{k_*}^n \right) \varepsilon_{k_R} - 2\pi \Delta t \sum_{k \in X \cap \mathbb{Z}} A(f_k^n) \Delta \varepsilon,
\end{aligned}$$

and

$$\sum_{k \in X \cap \mathbb{Z}} A(f_k^n) \Delta \varepsilon = \sum_{k \in X \cap \mathbb{Z}} \sum_{k_* \in X \cap \mathbb{Z}} \kappa_{k,k_*} (f_{k_*}^n D_k f_k^n - f_k^n D_{k_*} f_{k_*}^n) (\Delta \varepsilon)^2 = 0,$$

because it is the sum of coefficients of an anti-symmetric matrix (recall that $\kappa_{k,k_*} = \kappa_{k_*,k}$). Finally

$$\varepsilon_{k_R} (M_{n+1} - M_n) = E_{n+1} - E_n.$$

This proves (iii), (i) and (ii). To end the proof we must prove (4.3.12) at step $n+1$. We have, for $k \in X \setminus \mathbb{Z}$ such that $k \Delta \varepsilon < R^2$,

$$\begin{aligned}
f_k^{n+1} &= f_k^n + \frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_k} \Delta \varepsilon} I_{k_*} \left(\kappa_{k+\frac{1}{2}, k_*} \left(f_{k_*}^n D_k f_{k+\frac{1}{2}}^n - f_{k+\frac{1}{2}}^n D_{k_*} f_{k_*}^n \right) \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_k} \Delta \varepsilon} I_{k_*} \left(\kappa_{k-\frac{1}{2}, k_*} \left(f_{k_*}^n D_k f_{k-\frac{1}{2}}^n - f_{k-\frac{1}{2}}^n D_{k_*} f_{k_*}^n \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Using point (ii) of Lemma 4.3.2, we have

$$\kappa_{k+\frac{1}{2}, k_*} D_k f_{k+\frac{1}{2}}^n - \kappa_{k-\frac{1}{2}, k_*} D_k f_{k-\frac{1}{2}}^n \geq -\frac{f_k^n}{\Delta \varepsilon} \left(\kappa_{k+\frac{1}{2}, k_*} + \kappa_{k-\frac{1}{2}, k_*} \right). \tag{4.3.16}$$

Then, using an Abel transform and assertion (v) of Lemma 4.3.2 we have, for $\ell = k \pm \frac{1}{2}$,

$$-I_{k_*} (D_{k_*} f_{k_*}^n \kappa_{\ell, k_*}) = J_{k_*} (f_{k_*}^n D_{k_*} \kappa_{\ell, k_*}) \geq 0. \tag{4.3.17}$$

Moreover, as κ is non negative,

$$-J_{k_*} \left(f_{k_*}^n D_{k_*} \kappa_{k-\frac{1}{2}, k_*} \right) \geq -\frac{1}{\Delta \varepsilon} J_{k_*} \left(f_{k_*}^n \kappa_{k_*+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right). \tag{4.3.18}$$

From assertion (i) of Lemma 4.3.2, there exists a universal constant c ($c = \pi 2^{\frac{7}{2}}$) such that

$$\begin{aligned} \kappa_{k+\frac{1}{2},k_*} + \kappa_{k-\frac{1}{2},k_*} &\leq c\sqrt{\varepsilon_{k_*}} \left(\sqrt{\varepsilon_{k+\frac{1}{2}}} + \sqrt{\varepsilon_{k-\frac{1}{2}}} \right) \\ &\leq c(1 + \sqrt{2})\sqrt{\varepsilon_{k_*}\varepsilon_k}, \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

$$\kappa_{k_*+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \leq c\sqrt{\varepsilon_{k_*+\frac{1}{2}}\varepsilon_{k-\frac{1}{2}}} \leq c\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_{k_*}}. \quad (4.3.20)$$

Indeed, if $k \in X \setminus \mathbb{Z}$, since $k \geq \frac{1}{2}$, then $\sqrt{\varepsilon_{k+\frac{1}{2}}} \leq \sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_k}$. Besides,

$$I_{k_*} (f_{k_*}^n \sqrt{\varepsilon_{k_*}}) \leq J_{k_*} (f_{k_*}^n \sqrt{\varepsilon_{k_*}}) = \frac{M_n}{2\pi} \leq \frac{M_0}{2\pi}. \quad (4.3.21)$$

From (4.3.16), (4.3.19) and (4.3.21), there exists a positive constant C_1 which depends only on M_0 such that

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_k}\Delta\varepsilon} I_{k_*} \left(f_{k_*}^n \left(\kappa_{k+\frac{1}{2},k_*} D_k f_{k+\frac{1}{2},k_*}^n - \kappa_{k-\frac{1}{2},k_*} D_k f_{k-\frac{1}{2},k_*}^n \right) \right) \geq -C_1 \frac{\Delta t}{(\Delta\varepsilon)^2} f_k^n. \quad (4.3.22)$$

Next, from (4.3.17), (4.3.18), (4.3.20) and (4.3.21), there exists a positive constant C_2 which depends only on γ and M_0 such that

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_k}\Delta\varepsilon} I_{k_*} \left(D_{k_*} f_{k_*}^n \left(\kappa_{k-\frac{1}{2},k_*} f_{k-\frac{1}{2}}^n - \kappa_{k+\frac{1}{2},k_*} f_{k+\frac{1}{2}}^n \right) \right) \geq -C_2 \frac{\Delta t}{(\Delta\varepsilon)^2} f_k^n. \quad (4.3.23)$$

From (4.3.22), (4.3.23) and (4.3.15) we have (4.3.12) with $C = \frac{1}{C_1+C_2}$. \square

4.3.2 Numerical results

Constant radius

In the case of a constant radius we have numerically observed each property of Proposition 4.3.1.

On Figure 4.3.1 we have plotted the mass and the energy of the solution along with its density distribution at time $t = 10$. We have chosen as initial condition a shifted Maxwellian vanishing on the boundary: $f_0 := e^{-v^2} - e^{-1}$, the radius is constant equal to 1, $\Delta\varepsilon = 0.00625$ and γ takes the values 0, -1, -1.5, -2, -2.5. As can be seen on Figure 4.3.1, the value of γ has poor influence on the qualitative behavior of the solution. These results are very similar to those presented in [10] for $\gamma = 0$: the mass and the energy converge very slowly to their limit. The density converges quickly to a Maxwellian profile and this profile converges very slowly to a Dirac mass. We recall that, for $\gamma = 0$ we have proved in [9] that, for any $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$,

there exists a constant $C_{R,f_0,\varepsilon}$ which depends only on R , ε and the initial condition f_0 such that

$$\|f(t, \cdot) - \mathcal{P}(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^1(B_R)} \leq \frac{C_{R,f_0,\varepsilon}}{1 + t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}},$$

with

$$\mathcal{P}(t, v) := \frac{M_f(t)}{(2\pi\beta(t))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{\beta(t)}},$$

where β is the solution of the ordinary differential equation

$$\begin{cases} \beta'(t) = 4E_f(t) - 6M_f(t)\beta(t), \\ \beta(0) = \frac{2E_{f_0}}{3M_{f_0}}. \end{cases}$$

We also proved that

$$\beta(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2E_f(t)}{3M_\infty} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R^2}{\log(t)},$$

where $M_\infty := \lim_{t \rightarrow +\infty} M_f(t) > 0$.

Radius defined by (4.1.4)

Here we assume that the radius is given by (4.1.4). We describe precisely what happens when $\gamma = -3$ and then we show the influence of γ .

On Figure 4.3.2 we have represented the mass M_f , the energy E_f , the radius R as a function of time $t \in [0, 10]$, and the density distribution at time $T = 10$ as a function of the velocity modulus, for different values of $\Delta\varepsilon$, in the case $\gamma = -3$. All the numerical data presented here are computed with the initial condition $f_0 = e^{-v^2} - e^{-1}$. However, the same behavior is observed for different initial conditions. It seems that the mass, the energy and the radius tends to 0 in finite time T^* which may depend on the initial condition. On the graphics presented here we have $T^* \simeq 2.8$.

We did not prove that the discrete radius is non increasing but it is coherent with the Remark 11 and it should be true if the scheme is convergent for sufficiently small Δt and $\Delta\varepsilon$. On the other hand, the fact that the radius tends to zero is not clear at all in theory and one may conjecture it from our simulations. More precisely, we observe numerically that, in finite time, R_n^2 becomes smaller than $\frac{5}{2}\Delta\varepsilon$ but greater than $2\Delta\varepsilon$ and it stays greater than $2\Delta\varepsilon$ until the end of the simulation.

Remark 14. We cannot prove that the discrete radius must be smaller than $\frac{5}{2}\Delta\varepsilon$ after a finite time T_* but if it happens, then it is easy to describe the behavior of the

scheme after this time. For $t \geq T^*$, $R_n^2 < \frac{5}{2}\Delta\varepsilon$ and then for $k \in X$, $k \geq \frac{5}{2}$, $f_k^n = 0$. Thus the scheme simply becomes

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{2}}^{n+1} &= f_{\frac{1}{2}}^n + \frac{\sqrt{2}\Delta t}{(\Delta\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \kappa_{1,2} \left(f_{\frac{3}{2}}^n\right)^2, \\ f_{\frac{3}{2}}^{n+1} &= f_{\frac{3}{2}}^n - \frac{2\sqrt{2}\Delta t}{\sqrt{3}(\Delta\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \kappa_{1,2} \left(f_{\frac{3}{2}}^n\right)^2. \end{aligned}$$

Since $\left(f_{\frac{1}{2}}^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ is a bounded nondecreasing sequence, it converges, and we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\frac{3}{2}}^n = 0.$$

In this case the mass and the energy are simply given by

$$\begin{aligned} M_n &= 2\pi(\Delta\varepsilon)^{\frac{3}{2}} \left(f_{\frac{1}{2}}^n \frac{1}{\sqrt{2}} + f_{\frac{3}{2}}^n \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \simeq \sqrt{2}\pi(\Delta\varepsilon)^{\frac{3}{2}} f_{\frac{1}{2}}^n, \\ E_n &= 2\pi(\Delta\varepsilon)^{\frac{5}{2}} \left(f_{\frac{1}{2}}^n \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + f_{\frac{3}{2}}^n \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right) \simeq \frac{\pi}{\sqrt{2}}(\Delta\varepsilon)^{\frac{5}{2}} f_{\frac{1}{2}}^n, \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

and hence

$$R_n \simeq \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \Delta\varepsilon.$$

Moreover, as far as the f_k^n are not all equal to 0, we have

$$R_n \geq \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \Delta\varepsilon.$$

Indeed,

$$\frac{R_n^2}{1-\gamma} = \frac{\sum_{k=0}^{4N+2} f_{k+\frac{1}{2}}^n (\Delta\varepsilon (k + \frac{1}{2}))^{\frac{3}{2}}}{\sum_{k=0}^{4N+2} f_{k+\frac{1}{2}}^n (\Delta\varepsilon (k + \frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}}.$$

Denoting

$$\alpha_k := \frac{f_{k+\frac{1}{2}}^n}{\sum_{\ell=0}^{4N+2} f_{\ell+\frac{1}{2}}^n}, \quad x_k := \sqrt{k + \frac{1}{2}},$$

we get, by convexity of the cube function,

$$\frac{R_n^2}{(1-\gamma)\Delta\varepsilon} = \frac{\sum_{k=0}^{4N+2} \alpha_k x_k^3}{\sum_{k=0}^{4N+2} \alpha_k x_k} \geq \left(\sum_{k=0}^{4N+2} \alpha_k x_k \right)^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Now, to prove numerically that the mass, the energy and the radius tends to 0 at $t = T^*$ we look at the values of the mass and the energy at T^* for different values of $\Delta\varepsilon$.

On Figure 4.3.2 we have plotted in loglog scale the values of the mass and energy at time $t = 10$ obtained in Figure 4.3.2. We observe that the mass at T^* is a $O(\Delta\varepsilon^{\frac{1}{3}})$ and the energy is a $O(\Delta\varepsilon^{\frac{4}{3}})$.

Remark 15. We may have an idea of these orders of magnitude in $\Delta\varepsilon$ by a heuristic argument. Let us denote $f_{\frac{1}{2}}^\infty$, M_∞ and E_∞ the limits of $f_{\frac{1}{2}}^n$, M_n and E_n respectively. From (4.3.24) we know that if $f_{\frac{1}{2}}^\infty$ is a $O(\Delta\varepsilon^\alpha)$, with $\alpha \in \mathbb{R}$, then $M_\infty = O(\Delta\varepsilon^{\alpha+\frac{3}{2}})$ and $E_\infty = O(\Delta\varepsilon^{\alpha+\frac{5}{2}})$. Besides, from (4.3.5) we should also have $E_\infty = O(M_\infty^{1-\gamma}) = O(\Delta\varepsilon^{(1-\gamma)(\alpha+\frac{3}{2})})$. Finally α is the solution of

$$(1 - \gamma) \left(\alpha + \frac{3}{2} \right) = \alpha + \frac{5}{2}.$$

Thus,

$$\alpha = -\frac{1}{\gamma} - \frac{3}{2},$$

$$f_{\frac{1}{2}}^\infty = O\left(\Delta\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}-\frac{3}{2}}\right), \quad M_\infty = O\left(\Delta\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}}\right), \quad E_\infty = O\left(\Delta\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}+1}\right).$$

To conclude we look at the influence of γ on the value of T^* . On Figure 4.3.2 we observe that the vanishing time T^* is a non increasing function of γ . It might come from the fact that in (4.1.4), the radius R is a non increasing function of γ .

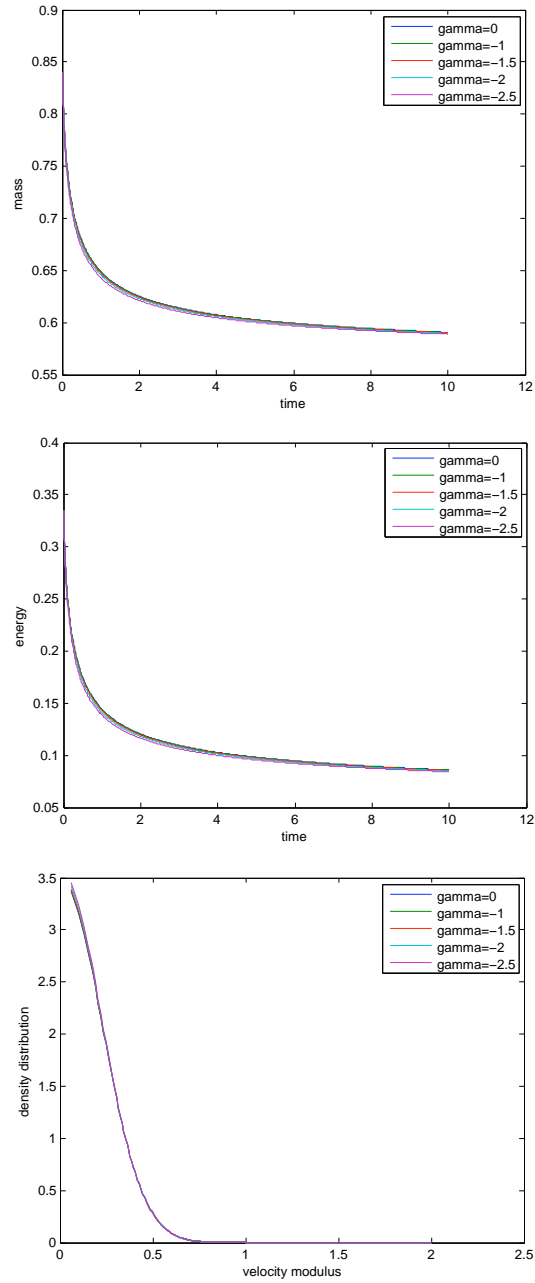


Figure 4.3.1: Mass, energy and density distribution at time $t = 10$ of the solution for different values of γ , with $f_0(v) := e^{-v^2} - e^{-1}$, $\Delta\varepsilon = 0.00625$ and $R = 1$.

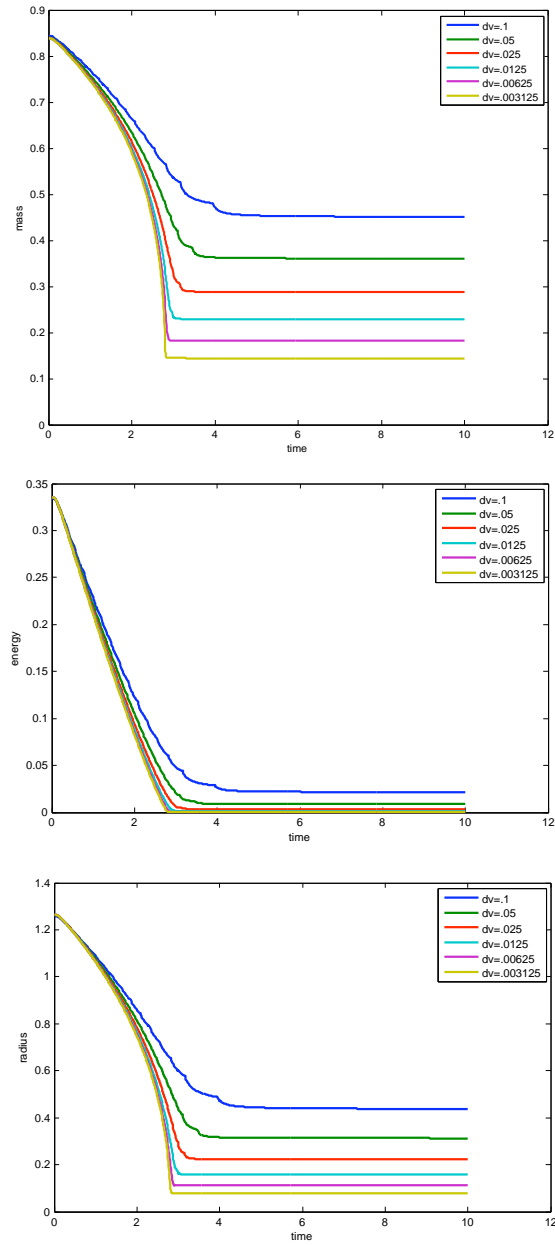


Figure 4.3.2: Mass, energy, radius and density distribution at time $t = 10$ of the solution for different space discretization step, with $f_0(v) := e^{-v^2} - e^{-1}$, $\gamma = -3$ and R given by (4.1.4).

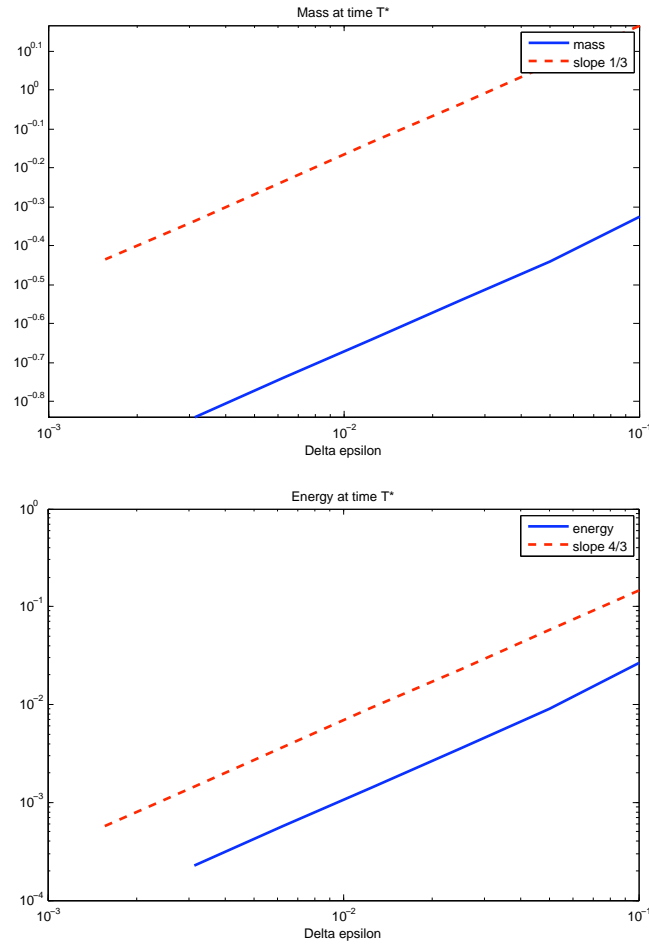


Figure 4.3.3: Order of magnitude in $\Delta\epsilon$ of mass and energy at time $t = 10$, with $f_0(v) := e^{-v^2} - e^{-1}$, $\gamma = -3$ and R given by the physical law.

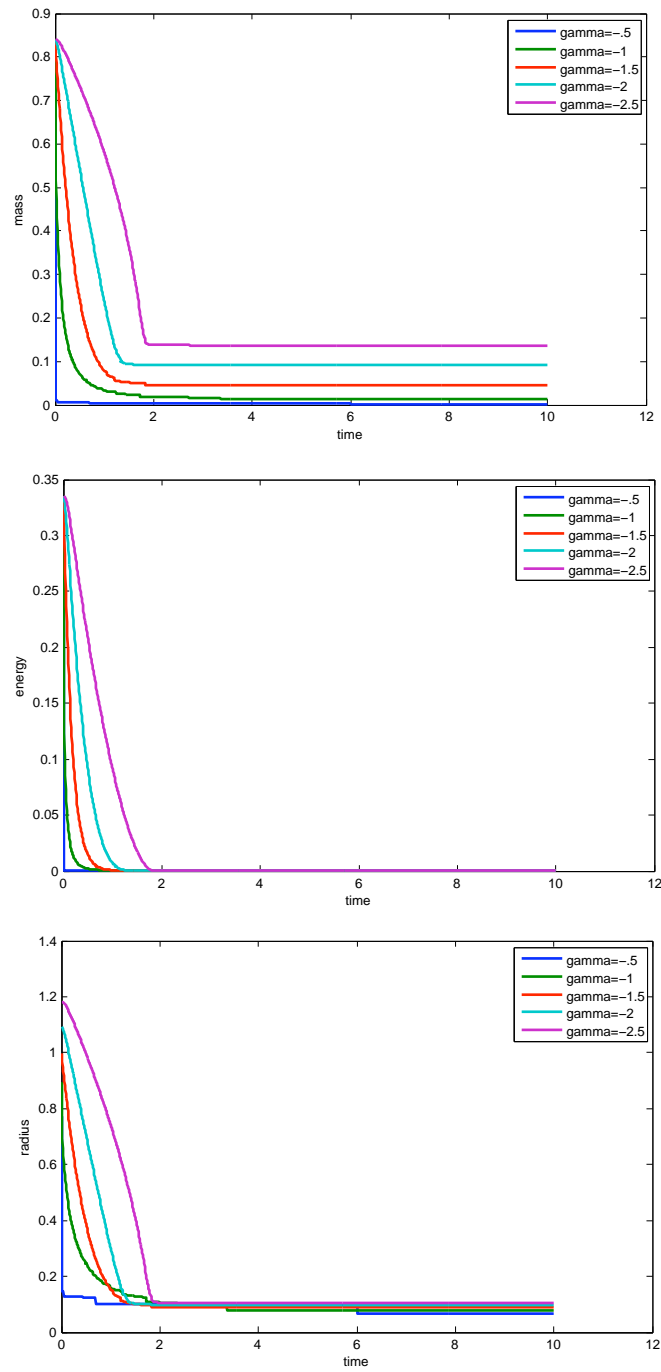


Figure 4.3.4: Mass, energy, radius and density distribution at time $t = 10$ of the solution for different values of γ , with $f_0(v) := e^{-v^2} - e^{-1}$, $\Delta\varepsilon = 0.00625$ and R given by the physical law.

Deuxième partie

Limite diffusive

Chapitre 5

Modèle de type Vlasov-BGK avec évaporation

5.1 Le modèle

Lorsque l'on considère le noyau de collision de Landau homogène en espace pour un potentiel Maxwellien et des solutions à symétrie sphérique, on obtient un noyau de collision de type Fokker-Planck (voir le chapitre 2). On peut encore simplifier ce noyau en l'approchant par un noyau de type BGK [12]. Ce n'est pas rigoureux mais on obtient un modèle qui a le même comportement. Ici on utilise ce noyau pour des solutions non homogènes en espace et qui ne sont plus à symétrie sphérique en vitesse (la symétrie sphérique en vitesse n'est pas conservée dans le cas non homogène en espace).

On ajoute à ce modèle une hypothèse d'évaporation à seuil d'évaporation constant R . Cela consiste à choisir comme domaine de vitesses la boule B_R (de \mathbb{R}^3) de rayon R . Dans le cas du modèle de type Fokker-Planck on impose une condition de Dirichlet homogène. Autrement dit, les particules de vitesses supérieures à R sortent du système. Dans le cas du modèle BGK on ne peut pas a priori imposer une condition au bord en vitesse. On expliquera par la suite où se situe l'hypothèse d'évaporation. Pour simplifier, on travaille sur un domaine périodique $\mathbb{T} := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ en espace.

La fonction de distribution f des particules est donc définie de

$$\mathcal{D} = [0, +\infty[_t \times \mathbb{T}_x \times (B_R)_v \tag{5.1.1}$$

dans $[0, +\infty[$. On notera

$$\begin{aligned} m_f(t, x) &:= \int_{B_R} f(t, x, v) \, dv, & M_f(t) &:= \int_{\mathbb{T}} m_f(t, x) \, dx, \\ e_f(t, x) &:= \int_{B_R} f(t, x, v) v^2 \, dv, & E_f(t) &:= \int_{\mathbb{T}} e_f(t, x) \, dx, \\ \theta_f(t, x) &:= \frac{e_f(t, x)}{3m_f(t, x)}, & \Theta_f(t) &:= \int_{\mathbb{T}} \theta_f(t, x) \, dx, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

avec (M_f, E_f, Θ_f) , la masse, l'énergie et la température de f , et (m_f, e_f, θ_f) leurs densités.

Le modèle que l'on considère est une équation de type Vlasov-BGK :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{E}_f - f. \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

où \mathcal{E}_f est une distribution d'« équilibre » (qui évolue au cours du temps) définie par

$$\mathcal{E}_f := \frac{m_f}{(2\pi\theta_f)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_f}}, \quad (5.1.4)$$

Dans ce modèle il y a de l'évaporation (la masse décroît), parce que f cherche à se rapprocher de la distribution d'équilibre \mathcal{E}_f qui a toujours une masse strictement inférieure à la masse M_f de f tant que la température Θ_f est strictement positive. En effet, lorsque $\Theta_f > 0$, la queue de la distribution Maxwellienne \mathcal{E}_f « déborde » de la boule B_R et sa masse sur cette boule est nécessairement strictement plus petite que sa masse sur l'espace \mathbb{R}^3 tout entier qui vaut M_f . D'après ce raisonnement heuristique, la température Θ_f doit donc tendre vers 0 à l'équilibre.

Il y a donc deux scénarii possibles. Soit toute la masse s'évapore en temps fini et il ne reste plus rien. Soit le reste de la masse tend vers une masse limite M_∞ strictement positive et la distribution d'équilibre \mathcal{E}_f converge vers un pic de Dirac en vitesse (toutes les particules ont une vitesse nulle).

Le modèle de Fokker-Planck est particulièrement intéressant parce qu'on sait qu'une partie de la masse ne s'évapore pas. En effet, on peut montrer dans ce modèle que la quantité

$$\tilde{M}_f := M_f - \frac{E_f}{R^2}. \quad (5.1.5)$$

est conservée et initialement strictement positive. On a donc

$$M_f \geq M_{f_0} - \frac{E_{f_0}}{R^2} + \frac{E_f}{R^2} \geq M_{f_0} - \frac{E_{f_0}}{R^2} > 0.$$

Dans le cas du modèle BGK, la quantité \tilde{M}_f n'est plus conservée, mais elle est croissante et la démonstration précédente est encore valable. C'est donc le deuxième scénario qui se produit. De plus, la vitesse de convergence vers l'équilibre est donnée par la vitesse à laquelle la température converge vers 0. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, cette vitesse n'est pas exponentielle. C'est encore un argument qui rend le modèle BGK avec évaporation (et le modèle Fokker-Planck avec évaporation) intéressant à étudier. On donne les justifications de ces arguments heuristiques dans la suite.

5.2 Le cas homogène

Le cas homogène en espace est important parce qu'il est facile à traiter et qu'il permet de comprendre comment se comportent asymptotiquement la masse, l'énergie et la température ce qui donne une intuition de comment se comportent les moments de f dans le cas inhomogène. Ce qui est remarquable dans le cas homogène, et c'est la raison pour laquelle ce modèle est facile à traiter, c'est que la température Θ_f vérifie une équation différentielle ordinaire. La masse M_f est elle même solution d'une équation différentielle ordinaire qui dépend de la température Θ_f et, à partir du moment où la masse et la température sont connues, la distribution f vérifie une équation linéaire particulièrement simple. On résume les propriétés de ce modèle dans la proposition suivante :

Proposition 5.2.1. *Soit $f_0 : B_R \rightarrow [0, +\infty[$ intégrable et non presque partout nulle. Alors il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^\infty([0; +\infty[_t, \mathbb{L}^1((B_R)_v, [0, +\infty[))$ du problème*

$$\begin{cases} \partial_t f = \mathcal{E}_f - f, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \|f(t, \cdot) - f_0\|_{\mathbb{L}^1} = 0, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où \mathcal{E}_f est définie par (5.1.4). De plus,

- i. Les moments M_f , E_f et Θ_f définis par (5.1.2) sont décroissants. Le moment \tilde{M}_f défini par (5.1.5) est croissant. La masse est donc convergente et minorée :

$$M_f \geq \tilde{M}_{f_0} > 0.$$

- ii. La température Θ_f vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\Theta'_f(t) = -\frac{2R^3}{3\sqrt{2\pi\Theta_f(t)}} e^{-\frac{R^2}{2\Theta_f(t)}}. \quad (5.2.2)$$

iii. La température converge vers 0 et plus précisément on a

$$\Theta_f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{R^2}{2 \ln(t)} - \frac{5R^2 \ln(\ln(t))}{4 \ln^2(t)} - \ln \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \right) \frac{R^2}{2 \ln^2(t)} + o \left(\frac{1}{\ln^2(t)} \right), \quad (5.2.3)$$

$$(\mathcal{E}_f(t))|_{|v|=R} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{M_\infty}{|B_R| t \ln(t)},$$

avec

$$M_\infty := \lim_{t \rightarrow +\infty} M_f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{M}_f(t).$$

iv. On peut définir une entropie :

$$H_f(t) := \int_{B_R} (f(t, v) \ln(f(t, v)) - f(t, v)) \, dv - X(M_f(t), \Theta_f(t)), \quad (5.2.4)$$

avec

$$X(a, b) = a \ln \left(\frac{a}{(2\pi b)^{\frac{3}{2}}} \right) - \frac{5}{2}a.$$

L'entropie H_f est décroissante.

Remarque 1. Il est facile d'obtenir un développement asymptotique de la température Θ_f et de la valeur au bord de la distribution d'équilibre \mathcal{E}_f . Les trois termes du développement de la température Θ_f sont nécessaires pour avoir l'équivalent de la valeur au bord de la distribution d'équilibre $(\mathcal{E}_f)|_{|v|=R}$. Lorsque l'on remplace cet équivalent dans (5.2.2) on trouve

$$\Theta'_f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{R^2}{2t \ln^2(t)}.$$

Cela correspond à la dérivée de l'équivalent de Θ_f .

Remarque 2. Il n'est pas sûr que l'entropie H_f soit d'une grande utilité à cause de la deuxième partie qui dépend de la masse et de la température. De plus, on ne connaît ni son signe ni sa limite.

Démonstration. On suppose que f est solution. Il est facile de voir que M_f et E_f sont croissants et que \tilde{M}_f est croissant. En effet on a

$$\begin{aligned} M'_f &= \int_{B_R} \mathcal{E}_f \, dv - M_f = - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} \mathcal{E}_f \, dv < 0, \\ E'_f &= \int_{B_R} \mathcal{E}_f v^2 \, dv - E_f = - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} \mathcal{E}_f v^2 \, dv < 0, \\ \tilde{M}'_f &= M'_f - \frac{E'_f}{R^2} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} \mathcal{E}_f \left(\frac{v^2}{R^2} - 1 \right) \, dv \geq 0. \end{aligned}$$

Puisque l'énergie E_f est positive, la définition de \tilde{M}_f implique que $M_f \geq \tilde{M}_f \geq \tilde{M}_{f_0} > 0$. On a donc montré le (i). Notons, pour $u \in \mathbb{R}$,

$$F(u) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\substack{|v| \geq u \\ v \in \mathbb{R}^3}} e^{-v^2} dv \text{ et } G(u) = \frac{2}{3\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\substack{|v| \geq u \\ v \in \mathbb{R}^3}} e^{-v^2} v^2 dv = \frac{4u^3}{3\sqrt{\pi}} e^{-u^2} + F(u).$$

On a alors, pour $t \in [0, +\infty[$,

$$M'_f(t) = -M_f(t) F\left(\frac{R}{\sqrt{2\Theta_f(t)}}\right)$$

et

$$E'_f(t) = -E_f(t) G\left(\frac{R}{\sqrt{2\Theta_f(t)}}\right) = -\frac{4\pi R^3 E_f(t)}{3(2\pi\Theta_f(t))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{R^2}{2\Theta_f(t)}} - E_f(t) F\left(\frac{R}{\sqrt{2\Theta_f(t)}}\right).$$

De plus,

$$\begin{aligned} E'_f(t) &= (3M_f\Theta_f)'(t) = 3M'_f(t)\Theta_f(t) + 3M_f(t)\Theta'_f(t) \\ &= -E_f(t) F\left(\frac{R}{\sqrt{2\Theta_f(t)}}\right) + 3M_f(t)\Theta'_f(t). \end{aligned}$$

On en déduit (5.2.2) :

$$\Theta'_f = -\frac{4\pi R^3 \Theta_f}{3(2\pi\Theta_f)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{R^2}{2\Theta_f}} = -\frac{2R^3}{3\sqrt{2\pi}\Theta_f} e^{-\frac{R^2}{2\Theta_f}}.$$

Ceci montre le point (ii). On en déduit également l'existence de solutions régulières. En effet, si on prend Θ_f la solution régulière de (5.2.2) avec la condition initiale $\Theta_f(0) = \Theta_{f_0}$, M_f la solution de

$$M'_f = -M_f F\left(\frac{R}{\sqrt{2\Theta_f}}\right),$$

avec la condition initiale $M_f(0) = M_{f_0}$ alors f est la solution de (5.2.1) avec \mathcal{E}_f qui est connue en fonction de v , M_{f_0} et Θ_{f_0} . Pour chaque valeur de $v \in B_R$, $f(\cdot, v)$ est donc solution d'une équation différentielle ordinaire et il est facile de donner une expression explicite de f en fonction de f_0 , M_f et Θ_f :

$$f(t, v) = f_0(v) e^{-t} + \int_0^t \frac{M_f(s)}{(2\pi\Theta_f(s))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\Theta_f(s)} + t-s} ds$$

Cette solution est unique et a la régularité annoncée. Il est élémentaire d'obtenir le développement à tout ordre de la température. On ne redonne pas ici les calculs

qui permettent d'établir le (iii). Pour terminer montrons le (iv). Par croissance de la fonction \ln on a

$$\int_{B_R} (\mathcal{E}_f(t, v) - f(t, v)) \ln \left(\frac{f(t, v)}{\mathcal{E}_f(t, v)} \right) dv \leq 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} (\mathcal{E}_f(t, v) - f(t, v)) \ln(f(t, v)) dv \\ & \leq \ln \left(\frac{M_f(t)}{(2\pi\Theta_f(t))^{\frac{3}{2}}} \right) \int_{B_R} (\mathcal{E}_f(t, v) - f(t, v)) dv \\ & \quad - \int_{B_R} \frac{v^2}{2\Theta_f(t)} (\mathcal{E}_f(t, v) - f(t, v)) dv \\ & \leq \ln \left(\frac{M_f(t)}{(2\pi\Theta_f(t))^{\frac{3}{2}}} \right) M'_f(t) - \frac{1}{2\Theta_f(t)} E'_f(t) \\ & \leq \left(\ln \left(\frac{M_f(t)}{(2\pi\Theta_f(t))^{\frac{3}{2}}} \right) - \frac{3}{2} \right) M'_f(t) - \frac{3M_f(t)}{2\Theta_f(t)} \Theta'_f(t) \\ & \leq \frac{d}{dt} (X(M_f(t), \Theta_f(t))). \end{aligned}$$

On a donc

$$H'_f(t) \leq 0.$$

□

5.3 Le cas inhomogène

5.3.1 Existence et unicité de solutions régulières

Dans le cas inhomogène, on peut encore montrer qu'il y a existence et unicité de solutions régulières mais c'est plus compliqué. Je ne donne pas la preuve ici mais je donne l'estimation clef qui fait marcher la preuve. On peut adapter la preuve d'existence de Perthame et Pulvirenti (cf. [35]). On utilise le lemme suivant :

Lemme 5.3.1. *Soit f une fonction définie de \mathcal{D} (défini par (5.1.1)) dans $[0, +\infty[$ mesurable et bornée et non nulle. On peut définir sa densité de masse m_f et sa densité de température θ_f d'après (5.1.2). On note, pour $(t, x) \in [0, +\infty[_t \times \mathbb{T}_x$,*

$$|f(t, x, \cdot)|_\infty := \sup_{v \in B_R} |f(t, x, v)|.$$

Alors, il existe une constante universelle $C > 0$ telle que

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{T}_x, \quad \frac{m_f(t, x)}{(2\pi\theta_f(t, x))^{\frac{3}{2}}} \leq C |f(t, x, \cdot)|_\infty.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$, on a

$$\begin{aligned} m_f(t, x) &= \int_{B_R} f(t, x, v) \, dv \\ &\leq \int_{B_R} f(t, x, v) \mathbb{1}_{|v| \leq \rho} \, dv + \int_{B_R} f(t, x, v) \mathbb{1}_{|v| > \rho} \, dv \\ &\leq \frac{4\pi\rho^3}{3} |f(t, x, \cdot)|_\infty + \frac{3}{\rho^2} m_f(t, x) \theta_f(t, x). \end{aligned}$$

Si on prend $\rho^5 = \frac{m_f(t, x) \theta_f(t, x)}{|f(t, x, \cdot)|_\infty}$ on trouve

$$m_f(t, x) \leq \left(\frac{4\pi}{3} + 3 \right) m_f^{\frac{3}{5}}(t, x) \theta_f^{\frac{3}{5}}(t, x) |f(t, x, \cdot)|_\infty^{\frac{2}{5}},$$

d'où

$$\frac{m_f(t, x)}{(2\pi\theta_f(t, x))^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{4\pi}{3} + 3 \right)^{\frac{5}{2}} |f(t, x, \cdot)|_\infty.$$

□

Remarque 3. La valeur optimale de la constante C et la fonction f qui permet d'atteindre cet optimum sont étudiées dans [26].

On peut maintenant montrer l'estimation \mathbb{L}^∞ :

Lemme 5.3.2. Soit g de \mathcal{D} dans $[0, +\infty[$ continue et avec des dérivées partielles continues selon t et x et f_0 une fonction de $\mathbb{T}_x \times (B_R)_v$ dans $]0, +\infty[$ qui est différentiable en espace de différentielle continue. On suppose que g vérifie l'hypothèse suivante :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \sup_{(x, v) \in \mathbb{T}_x \times (B_R)_v} |g(t, x, v)| \leq \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}_x \times (B_R)_v)} e^{(C-1)t}, \quad (5.3.1)$$

où C est la constante strictement positive et universelle donnée par le Lemme 5.3.1. Alors, la fonction f solution de

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{E}_g - f, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

qui est donnée par

$$f(t, x, v) := f_0(x - tv, v)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} \mathcal{E}_g(s, x + (s-t)v, v) dv. \quad (5.3.3)$$

vérifie également (5.3.1).

Démonstration. D'après (5.3.3) on a

$$f(t, x, v) = f_0(x - tv, v)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} \mathcal{E}_g(s, x + (s-t)v, v) ds.$$

d'où, d'après le Lemme 5.3.1,

$$f(t, x, v) \leq \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}_x \times (B_R)_v)} e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} C |g(s, x + (s-t)v, \cdot)|_\infty ds.$$

D'après l'hypothèse (5.3.1) on a donc

$$\begin{aligned} f(t, x, v) &\leq \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}_x \times (B_R)_v)} e^{-t} + C \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}_x \times (B_R)_v)} \int_0^t e^{s-t} e^{(C-1)s} ds \\ &\leq \|f_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}_x \times (B_R)_v)} e^{(C-1)t}, \end{aligned}$$

d'où le lemme. □

Remarque 4. Le Lemme 5.3.2 est utile pour montrer que le problème de point fixe (5.3.2) admet une solution et que cette solution vérifie l'estimation (5.3.1).

Remarque 5. On peut encore montrer que la masse M_f et l'énergie E_f sont décroissantes mais c'est à peu près tout.

5.3.2 Limite diffusive

Ici on s'intéresse à la limite diffusive du modèle de Vlasov-BGK avec évaporation. L'équation (5.1.3) devient en scaling diffusif

$$\partial_t f_\varepsilon(t, x, v) + \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla_x f_\varepsilon(t, x, v) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{E}_{f_\varepsilon}(t, x, v) - f_\varepsilon(t, x, v)), \quad (5.3.4)$$

où $\varepsilon > 0$ est amené à converger vers 0. Passer à la limite revient à passer du microscopique au macroscopique, en passant d'une équation sur la distribution f_ε à un

système d'équations clos sur les densités m_{f_ε} , e_{f_ε} et θ_{f_ε} . Les moments vérifient les équations suivantes :

$$\partial_t m_{f_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot \left(\int_{B_R} f_\varepsilon v \, dv \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|v| \geq R} \mathcal{E}_{f_\varepsilon} \, dv. \quad (5.3.5)$$

$$\partial_t e_{f_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot \left(\int_{B_R} f_\varepsilon v v^2 \, dv \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|v| \geq R} \mathcal{E}_{f_\varepsilon} v^2 \, dv. \quad (5.3.6)$$

$$\partial_t \theta_{f_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon m_{f_\varepsilon}} \left(\nabla_x \cdot \left(\int_{B_R} f_\varepsilon v \frac{v^2}{3} \, dv \right) - \theta_{f_\varepsilon} \nabla_x \cdot \left(\int_{B_R} f_\varepsilon v \, dv \right) \right) = -\frac{2R^3 e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}}}{3\varepsilon^2 \sqrt{2\pi\theta_{f_\varepsilon}}}. \quad (5.3.7)$$

Pour clore ce système, on utilise un développement asymptotique formel. On a

$$f_\varepsilon = \mathcal{E}_{f_\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

et donc on pose

$$\hat{g}_0 := f_\varepsilon, \quad g_0 := \mathcal{E}_{f_\varepsilon}, \quad \hat{g}_0 =: g_0 + \varepsilon \hat{g}_1,$$

On réinjecter ce développement dans (5.3.4) :

$$\partial_t g_0(t, x, v) + \varepsilon \partial_t \hat{g}_1(t, x, v) + \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla_x g_0(t, x, v) + v \cdot \nabla_x \hat{g}_1(t, x, v) = -\frac{1}{\varepsilon} \hat{g}_1(t, x, v).$$

On en déduit que

$$\hat{g}_1(t, x, v) = -v \cdot \nabla_x g_0(t, x, v) + O(\varepsilon).$$

Nous allons montrer que l'on peut alors clore les équations sur les moments et on obtient le système :

$$\partial_t m_{f_\varepsilon} - \Delta_x(m_{f_\varepsilon} \theta_{f_\varepsilon}) = -\frac{2R m_{f_\varepsilon}}{\varepsilon^2 \sqrt{2\pi\theta_{f_\varepsilon}}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} - \frac{m_{f_\varepsilon}}{\varepsilon^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) + O(\varepsilon), \quad (5.3.8)$$

$$\partial_t e_{f_\varepsilon} - \Delta_x(5m_{f_\varepsilon} \theta_{f_\varepsilon}^2) = -\frac{2R(R^2 + 3\theta_{f_\varepsilon})m_{f_\varepsilon}}{\varepsilon^2 \sqrt{2\pi\theta_{f_\varepsilon}}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} - \frac{e_{f_\varepsilon}}{\varepsilon^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) + O(\varepsilon), \quad (5.3.9)$$

$$\partial_t \theta_{f_\varepsilon} - \frac{\Delta_x(5m_{f_\varepsilon} \theta_{f_\varepsilon}^2)}{3m_{f_\varepsilon}} + \frac{\theta_{f_\varepsilon} \Delta_x(m_{f_\varepsilon} \theta_{f_\varepsilon})}{m_{f_\varepsilon}} = -\frac{2R^3}{3\varepsilon^2 \sqrt{2\pi\theta_{f_\varepsilon}}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} + O(\varepsilon), \quad (5.3.10)$$

avec

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} \, du.$$

Voici les grandes étapes du calcul. On commence par simplifier les seconds membres de (5.3.5) et de (5.3.6). Il n'y a pas ici de souci de clôture, il s'agit juste de calculer

ces second membres en fonction des moments. En passant en coordonnées sphériques on a :

$$\int_{|v| \geq R} \mathcal{E}_{f_\varepsilon} dv = \frac{4\pi m_{f_\varepsilon}}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \int_R^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} r^2 dr.$$

Par une intégration par parties et un changement de variable on obtient alors

$$\int_{|v| \geq R} \mathcal{E}_{f_\varepsilon} dv = \frac{2Rm_{f_\varepsilon}}{\sqrt{2\pi\theta_{f_\varepsilon}}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} + m_{f_\varepsilon} \operatorname{erfc} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right)$$

En utilisant le développement asymptotique de erfc au voisinage de $+\infty$:

$$\operatorname{erfc}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} + O \left(\frac{e^{-x^2}}{x^3} \right),$$

on peut remarquer que

$$\int_{|v| \geq R} \mathcal{E}_{f_\varepsilon} dv = \frac{2m_{f_\varepsilon}(R^2 + \theta_{f_\varepsilon})}{R\sqrt{2\pi\theta_{f_\varepsilon}}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} + O \left(\theta_{f_\varepsilon}^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right).$$

Cependant, il n'est pas forcément raisonnable de négliger le

$$O \left(\theta_{f_\varepsilon}^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right).$$

Il faudrait déterminer l'ordre de grandeur en ε de θ_{f_ε} . C'est assez délicat et j'en rediscuterai plus précisément après. De même on a, avec une intégration par parties supplémentaire :

$$\int_{|v| \geq R} \mathcal{E}_{f_\varepsilon} v^2 dv = \frac{2R(R^2 + 3\theta_{f_\varepsilon})m_{f_\varepsilon}}{\sqrt{2\pi\theta_{f_\varepsilon}}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} + e_{f_\varepsilon} \operatorname{erfc} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right).$$

Ensuite, on clôt le système d'équations sur les moments en remplaçant dans les termes de transport, f_ε par son développement :

$$\int_{B_R} f_\varepsilon v v^{2k} dv = \int_{B_R} (g_0 + \varepsilon v \cdot \nabla_x g_0) v v^{2k} dv + O(\varepsilon^2),$$

avec $k = 0$ ou 1 . Par propriété de symétrie de g_0 on a

$$\int_{B_R} g_0 v v^{2k} dv = 0$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{B_R} f_\varepsilon v v^{2k} dv = \int_{B_R} v \cdot \nabla_x g_0 v v^{2k} dv + O(\varepsilon).$$

La fonction g_0 s'exprime directement à partir des moments m_{f_ε} et θ_{f_ε} , il ne reste plus qu'à calculer et simplifier les termes de transport. On a

$$\nabla_x \left(\frac{m_{f_\varepsilon}}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) = \left(-\frac{3\nabla_x \theta_{f_\varepsilon}}{2\theta_{f_\varepsilon}} + \frac{\nabla_x m_{f_\varepsilon}}{m_{f_\varepsilon}} + v^2 \frac{\nabla_x \theta_{f_\varepsilon}}{2\theta_{f_\varepsilon}^2} \right) \frac{m_{f_\varepsilon}}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}}.$$

On a, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^{2k} dv &= -\theta_{f_\varepsilon} \int_{B_R} \nabla_v \left(e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) \cdot v v^{2k-2} dv \\ &= -4\pi\theta_{f_\varepsilon} R^{2k+1} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} + (2k+1)\theta_{f_\varepsilon} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^{2k-2} dv, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta_{f_\varepsilon} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^{-2} dv &= 4\pi\theta_{f_\varepsilon} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} dr \\ &= 2\pi(2\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}}} e^{-u^2} du \\ &= (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} dv &= -4\pi\theta_{f_\varepsilon} R e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} + (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right), \\ \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^2 dv &= -4\pi\theta_{f_\varepsilon} R(R^2 + 3\theta_{f_\varepsilon}) e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} + 3\theta_{f_\varepsilon} (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right), \\ \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^4 dv &= -4\pi\theta_{f_\varepsilon} R(R^4 + 5\theta_{f_\varepsilon} R^2 + 15\theta_{f_\varepsilon}^2) e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} + 15\theta_{f_\varepsilon}^2 (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right), \\ \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^6 dv &= -4\pi\theta_{f_\varepsilon} R(R^6 + 7\theta_{f_\varepsilon} R^4 + 35\theta_{f_\varepsilon}^2 R + 105\theta_{f_\varepsilon}^3) e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \\ &\quad + 105\theta_{f_\varepsilon}^3 (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right). \end{aligned}$$

On peut en déduire le calcul de

$$\int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v \otimes v dv = \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v_1^2 dv \operatorname{Id} = \frac{1}{3} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^2 dv \operatorname{Id},$$

$$\begin{aligned}\int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^2 v \otimes v \, dv &= \frac{1}{3} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^4 \, dv \text{Id}, \\ \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^4 v \otimes v \, dv &= \frac{1}{3} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^6 \, dv \text{Id},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{B_R} v \cdot \nabla_x \left(\frac{m_{f_\varepsilon}}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) v \, dv \\ &= \frac{m_{f_\varepsilon}}{2\theta_{f_\varepsilon}^2 (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^2 v \otimes v \, dv \nabla_x \theta_{f_\varepsilon} \\ &+ \frac{1}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v \otimes v \, dv \nabla_x m_{f_\varepsilon} \\ &- \frac{3m_{f_\varepsilon}}{2\theta_{f_\varepsilon} (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v \otimes v \, dv \nabla_x \theta_{f_\varepsilon} \\ &= \nabla_x (m_{f_\varepsilon} \theta_{f_\varepsilon}) \operatorname{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) + \frac{e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}}}{\theta_{f_\varepsilon} (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \mathcal{R}_1(R, m_{f_\varepsilon}, \nabla_x m_{f_\varepsilon}, \theta_{f_\varepsilon}, \nabla_x \theta_{f_\varepsilon}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{B_R} v \cdot \nabla_x \left(\frac{m_{f_\varepsilon}}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) v v^2 \, dv \\ &= \frac{m_{f_\varepsilon}}{2\theta_{f_\varepsilon}^2 (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^4 v \otimes v \, dv \nabla_x \theta_{f_\varepsilon} \\ &+ \frac{1}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^2 v \otimes v \, dv \nabla_x m_{f_\varepsilon} \\ &- \frac{3m_{f_\varepsilon}}{2\theta_{f_\varepsilon} (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \int_{B_R} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} v^2 v \otimes v \, dv \nabla_x \theta_{f_\varepsilon} \\ &= \nabla_x (5m_{f_\varepsilon} \theta_{f_\varepsilon}^2) \operatorname{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) + \frac{e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}}}{\theta_{f_\varepsilon} (2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} \mathcal{R}_2(R, m_{f_\varepsilon}, \nabla_x m_{f_\varepsilon}, \theta_{f_\varepsilon}, \nabla_x \theta_{f_\varepsilon}).\end{aligned}$$

avec \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 des fonctions polynomiales relativement abominables (mais calculables) dont les expressions ne seront pas utiles ici puisqu'on les éliminera en discutant de l'ordre de grandeur en ε de θ_{f_ε} . Les équations semblent suggérer, et c'est cohérent avec les équivalents établis dans le cas homogène (voir la Proposition 5.2.1), que

$$\theta_{f_\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \sim \frac{C\varepsilon^2}{\ln(\varepsilon)}$$

avec C une constante et donc que

$$\theta_{f_\varepsilon} \sim -\frac{R^2}{4 \ln(\varepsilon)}.$$

Toutefois, si on redimensionne la température afin d'éliminer tous les ε , il faut négliger des termes en $\frac{1}{\ln(\varepsilon)}$ et on tombe sur des équations triviales pour la masse et pour l'énergie. Le modèle obtenu n'est pas forcément intéressant (on perd la dépendance en la variable d'espace x). Par ailleurs, dans le cadre d'applications physiques potentielles, le ε est effectivement négligeable mais le $\frac{1}{\ln(\varepsilon)}$ ne l'est pas vraiment. Il paraît alors plus raisonnable de considérer que : $\frac{1}{\ln(\varepsilon)}$ est une constante, θ_{f_ε} est d'ordre 1 et que $e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}}$ est d'ordre ε^2 . On peut alors simplifier les termes de transport :

$$\begin{aligned} \int_{B_R} v \cdot \nabla_x \left(\frac{m_{f_\varepsilon}}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) v \, dv &= \nabla_x(m_{f_\varepsilon} \theta_{f_\varepsilon}) + O(\varepsilon). \\ \int_{B_R} v \cdot \nabla_x \left(\frac{m_{f_\varepsilon}}{(2\pi\theta_{f_\varepsilon})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) v v^2 \, dv &= \nabla_x(5m_{f_\varepsilon} \theta_{f_\varepsilon}^2) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Mais par contre on ne simplifiera pas les seconds membres de (5.3.8) et (5.3.9). Avec un peu de calcul supplémentaire on peut alors obtenir (5.3.8), (5.3.9) et (5.3.10). Les second membres semblent être des termes de relaxation, mais en faisant l'hypothèse que $e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}}$ est d'ordre ε^2 , ces seconds membres sont en fait d'ordre 1 (grâce à l'équivalent de erfc au voisinage de $+\infty$). Ce qui est envisageable pour faire disparaître tous les ε , c'est de poser

$$\begin{aligned} e^{-\frac{R^2}{2\theta_{f_\varepsilon}}} &= \varepsilon^2 \mu_{f_\varepsilon} \\ \theta_{f_\varepsilon} &= -\frac{R^2}{2 \ln(\mu_{f_\varepsilon}) + 4 \ln(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

et de remplacer $\ln(\varepsilon)$ par une constante $-\kappa$. On peut alors écrire

$$\operatorname{erfc} \left(\frac{R}{\sqrt{2\theta_{f_\varepsilon}}} \right) = \varepsilon^2 \mu_{f_\varepsilon} \Psi \left(\sqrt{2\kappa - \ln(\mu_{f_\varepsilon})} \right)$$

avec

$$\Psi(x) = e^{x^2} \operatorname{erfc}(x),$$

et la contrainte

$$\ln(\mu_{f_\varepsilon}) < 2\kappa.$$

Bibliographie

- [1] R. Alexandre and C. Villani. On the Landau approximation in plasma physics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(1) :61–95, 2004.
- [2] A. Arnold. Entropy method and the large-time behavior of parabolic equations, *Lectures notes for XXVII Summer school in mathematical physics, Ravello, Italy, September 9-21*, (2002).
- [3] A. A. Arsen'ev and O. E. Buryak. On a connection between the solution of the Boltzmann equation and the solution of the Landau-Fokker-Planck equation. *Mat. Sb.*, 181(4) :435–446, 1990.
- [4] V. Bagland. Well-posedness for the spatially homogeneous Landau-Fermi-Dirac equation for hard potentials. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 134(3) :415–447, 2004.
- [5] V. Bagland and M. Lemou. Equilibrium states for the Landau-Fermi-Dirac equation. In *Nonlocal elliptic and parabolic problems*, volume 66 of *Banach Center Publ.*, pages 29–37. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004.
- [6] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton Series in Astrophysics, 1987.
- [7] F. Bouchut and J. Dolbeault. On long time asymptotics of the Vlasov-Fokker-Planck equation and of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system with Coulombic and Newtonian potentials. *Differential Integral Equations*, 8(3) :487–514, 1995.
- [8] J. Campos, M. del Pino, and J. Dolbeault. Relative equilibria in continuous stellar dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 300(3) :765–788, 2010.
- [9] P. Carcaud, Self-similar solutions for the Landau equation with Maxwellian potential on a bounded velocity domain, preprint.

- [10] P. Carcaud, P.-H. Chavanis, M. Lemou, and F. Méhats. Evaporation law in kinetic gravitational systems described by simplified Landau models. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14(3) :907–934, 2010.
- [11] J. A. Carrillo and G. Toscani, Exponential convergence toward equilibrium for homogeneous Fokker-Planck-type equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **21** (1998), 1269–1286.
- [12] C. Cercignani. The Boltzmann equation and its applications, volume 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [13] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. The mathematical theory of dilute gases, volume 106 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [14] S. Chandrasekhar, Dynamical friction. II. The rate of escape of stars from clusters and the evidence for the operation of dynamical friction, *Astrophys. J.*, **97** (1943), 263–273.
- [15] S. Chapman and T. G. Cowling. The mathematical theory of nonuniform gases. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases, In co-operation with D. Burnett, With a foreword by Carlo Cercignani.
- [16] P.-H. Chavanis, Relaxation of a test particle in systems with long-range interactions : diffusion coefficient and dynamical friction, *Eur. Phys. J. B*, **52** (2006), 61.
- [17] P.-H. Chavanis and M. Lemou, Escape of stars from gravitational clusters in the Chandrasekhar model, *Physica A*, **389** (2010), no.5, 1021–1040.
- [18] P. Degond and M. Lemou. Dispersion relations for the linearized Fokker-Planck equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 138(2) :137–167, 1997.
- [19] P. Degond and B. Lucquin-Desreux. The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2(2) :167–182, 1992.
- [20] L. Desvillettes. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Transport Theory Statist. Phys.*, 21(3) :259–276, 1992.
- [21] L. Desvillettes and C. Villani. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. I. Existence, uniqueness and smoothness. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(1-2) :179–259, 2000.

- [22] L. Desvillettes and C. Villani. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. II. H -theorem and applications. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(1-2) :261–298, 2000.
- [23] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [24] T. Goudon. On Boltzmann equations and Fokker-Planck asymptotics : influence of grazing collisions. *J. Statist. Phys.*, 89(3-4) :751–776, 1997.
- [25] H. E. Kandrup, Specific entropy and the evolution of the unconfined stellar systems, *Astronomy and Astrophysics*, **157** (1986), 387–392.
- [26] B. Khobalatte and B. Perthame. Maximum principle on the entropy and second-order kinetic schemes. *Math. Comp.*, 62(205) :119–131, 1994.
- [27] I. King, The escape of stars from clusters. V. The basic escape rate, *Astron. J.*, **65** (1960), 122.
- [28] O. A. Ladyženskaja, U. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, Translation of mathematical monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.
- [29] M. Lemou. Linearized quantum and relativistic Fokker-Planck-Landau equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, 23(12) :1093–1119, 2000.
- [30] M. Lemou, Solutions exactes de l'équation de Fokker-Planck, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **319** (1994), 579–583.
- [31] M. Lemou, Numerical algorithms for axisymmetric Fokker-Planck-Landau operators, *Journal of Computational Physics*, **157**, (2000), 762–786.
- [32] M. Lemou, F. Méhats, and C. Rigault. Stable ground states and self-similar blow-up solutions for the gravitational Vlasov-Manev system. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(6) :3928–3968, 2012.
- [33] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskiĭ. *Course of theoretical physics. Vol. 10*. Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies. Pergamon Press, Oxford, 1981. Translated from the Russian by J. B. Sykes and R. N. Franklin.
- [34] B. Lods, G. Toscani, Long-time behavior of nonautonomous Fokker-Planck equations and cooling of granular gases. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 57, No. 6, 2005.

- [35] B. Perthame and M. Pulvirenti. Weighted L^∞ bounds and uniqueness for the Boltzmann BGK model. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 125(3) :289–295, 1993.
- [36] L. Spitzer, The stability of isolated clusters, *Mon. not. R. astron. Soc.*, **100**, (1940), 396.
- [37] C. Villani, A review of mathematical topics in collisional kinetic theory, in “Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, Vol. I”, North-Holland, Amsterdam, (2002), 71–305.
- [38] C. Villani. On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 143(3) :273–307, 1998.

Résumé

L'étude de l'évolution de galaxies, et tout particulièrement du phénomène d'évaporation, a été pour la première fois menée à l'aide de modèles physiques, par Chandrasekhar notamment, dans les années 40. Depuis, de nouveaux modèles plus sophistiqués ont été introduits par les physiciens. Ces modèles d'évolution des galaxies sont des modèles cinétiques; bien connus et bien étudiés par les mathématiciens. Cependant, l'aspect évaporation (le fait que des étoiles sortent du système étudié) n'avait pas encore été étudié mathématiquement, à ma connaissance. La galaxie est vue comme un gaz constitué d'étoiles et le modèle consiste en une équation de Vlasov-Poisson, l'interaction étant la gravitation universelle, couplée avec au second membre un terme de collision de type Landau. On rajoute à ce modèle une condition d'évaporation qui consiste à dire que les étoiles dont l'énergie cinétique est suffisamment élevée pour quitter le système sont exclues. Ce modèle étant trop compliqué à étudier tel quel, je propose dans cette thèse plusieurs modèles simplifiés qui sont des premières étapes nécessaires à l'étude du modèle général et qui permettent de mieux comprendre les difficultés à surmonter. Dans une première partie, je m'intéresse au cas homogène en espace, pour lequel le terme de Vlasov-Poisson est remplacé par une simple dérivée en temps. Je fais une étude précise du cas à symétrie radiale en vitesse avec un potentiel Maxwellien, le terme de Landau étant alors remplacé par un terme de type Fokker-Planck, et je montre dans ce cas l'existence et l'unicité d'une solution régulière et l'existence d'un profil asymptotique des solutions. Dans le cas homogène général, je montre l'existence et l'unicité d'une solution régulière tout pendant que la masse ne s'est pas totalement évaporée. J'illustre ces résultats théoriques par des simulations numériques réalisées à l'aide de schémas numériques conservateurs. Dans une seconde partie, je m'intéresse au cas inhomogène en espace en dérivant un modèle hydrodynamique pour un modèle de type Vlasov-BGK (plus simple que le modèle Vlasov-Poisson-Landau) avec évaporation.

Abstract

The study of the evolution of the galaxies, and more specially of the evaporation phenomenon, was for the first time carried out, by Chandrasekhar in particular, in the 40s. Since then, more sophisticated models have been introduced by physicists. These models are kinetics models; well-known and well-studied by mathematicians. However, the evaporation (the fact that stars leave the galaxy) has never been studied before, to my knowledge. The galaxy is seen as a gaz of stars and the model is formed by a Vlasov-Poisson equation, with the gravitational interaction, coupled with Kernel of collision of Landau. A condition of evaporation is added to this model, saying the stars with a large enough kinetic energy are excluded. As this model is too complicated to be studied, I propose in this thesis several simpler models which constitute first steps toward the study of the general model and which inform us about the difficulties implied. In the first part, I am interested in the space-homogeneous model, for which the Vlasov-Poisson term is replaced by a simple time derivative. I make a precise study of the spherically symmetric case with a Maxwellian potential for which the the Landau term is replaced by a Fokker-Planck typed term, and I show the existence of a unique regular solution and the fact that this solution admits an asymptotical profile. In the general homogeneous case, I show the existence of a unique regular solution as long as the mass has not totally disappeared. Theses theoretical results are illustrated with numerical simulations obtained with conservative schemes. In the second part, I am interested in the inhomogeneous case and I derive an hydro-dynamical model for a Vlasov-BGK model (a simpler model than Vlasov-Poisson-Landau) with evaporation.